BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TOÁN 9

TẬP HAI



$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$





NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

PHAN ĐỨC CHÍNH (Tổng Chủ biên)
TÔN THÂN (Chủ biên)
NGUYỄN HUY ĐOAN – PHẠM GIA ĐỨC
TRƯƠNG CÔNG THÀNH – NGUYỄN DUY THUẬN

TOÁN 9

TẬP HAI

(Tái bản lần thứ mười lăm)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa để dành tặng cho các em học sinh lớp sau !

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch Hội đồng Thành viên **NGUYỄN ĐỨC THÁI**
Tổng Giám đốc **HOÀNG LÊ BÁCH**
Chịu trách nhiệm nội dung : Tổng biên tập **PHAN XUÂN THÀNH**

Biên tập lần đầu : **PHẠM BẢO KHUÊ - LÊ THỊ THANH HẰNG**
Biên tập tái bản : **NGUYỄN NGỌC TÚ**
Biên tập kĩ thuật và trình bày : **NGUYỄN THANH THUÝ - TRẦN THANH HẰNG**
Trình bày bìa : **BÙI QUANG TUẤN**
Sửa bản in : **VƯƠNG THỊ TRÌNH**
Chế bản : **CÔNG TY CP DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC HÀ NỘI**

TOÁN 9 - TẬP HAI

Mã số : 2H902T0

In .... cuốn (QĐ in số......), khổ 17 × 24cm.
Đơn vị in.......địa chỉ....
Cơ sở in........địa chỉ......
Số ĐKXB : 01-2020/CXBIPH/328-869/GD
Số QĐXB :....../QĐ-GD ngày....tháng....năm..
In xong và nộp lưu chiểu tháng .... năm ....
Mã số ISBN : Tập một : 978-604-0-18606-5
Tập hai : 978-604-0-18607-2

Phần ĐẠI SỐ

Chương III – HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Trở lại bài toán cổ quen thuộc sau đây :

Vừa gà vừa chó
Bó lại cho tròn
Ba mươi sáu con
Một trăm chân chẵn.

Hỏi có bao nhiêu gà, bao nhiêu chó ?

Ở lớp 8, ta đã biết cách giải bài toán trên bằng cách lập phương trình bậc nhất một ẩn. Muốn vậy, ta chọn một đại lượng chưa biết, số gà chẳng hạn, làm ẩn x rồi dựa vào các mối quan hệ giữa các đại lượng để lập nên một phương trình với ẩn x.

Nhưng trong bài toán trên, ngoài đại lượng chưa biết là số gà, ta thấy còn có một đại lượng chưa biết khác là số chó. Nếu kí hiệu x là số gà và y là số chó thì :

– Giả thiết *có tất cả 36 con vừa gà vừa chó* được mô tả bởi hệ thức $x + y = 36$.

– Giả thiết *có tất cả 100 chân* được mô tả bởi hệ thức $2x + 4y = 100$.

Các hệ thức trên là những ví dụ về *phương trình bậc nhất hai ẩn*.

Trong chương này, chúng ta sẽ làm quen với các phương trình có hai ẩn và sẽ thấy chúng được ứng dụng thế nào để giải các bài toán tương tự bài toán trên.

§1. Phương trình bậc nhất hai ẩn

Tập nghiệm của một phương trình bậc nhất hai ẩn có gì mới lạ ?

1. Khái niệm về phương trình bậc nhất hai ẩn

Ở lớp 8, chúng ta đã học phương trình bậc nhất một ẩn. Trong thực tế, còn có các tình huống dẫn đến phương trình có nhiều hơn một ẩn. Như đã thấy, bài toán mở đầu của chương này đã dẫn đến các phương trình bậc nhất hai ẩn : $x + y = 36$ và $2x + 4y = 100$.

• Một cách tổng quát, *phương trình bậc nhất hai ẩn* x *và* y *là hệ thức dạng*

$$ax + by = c, \qquad (1)$$

trong đó a, b *và* c *là các số đã biết* ($a \neq 0$ *hoặc* $b \neq 0$).

Ví dụ 1. Các phương trình $2x - y = 1$, $3x + 4y = 0$, $0x + 2y = 4$, $x + 0y = 5$ là những phương trình bậc nhất hai ẩn.

• Trong phương trình (1), nếu giá trị của vế trái tại $x = x_0$ và $y = y_0$ bằng vế phải thì *cặp số* $(x_0 ; y_0)$ *được gọi là một nghiệm của phương trình* (1).

Ta cũng viết : Phương trình (1) có nghiệm là $(x ; y) = (x_0 ; y_0)$.

Ví dụ 2. Cặp số (3 ; 5) là một nghiệm của phương trình $2x - y = 1$ vì $2.3 - 5 = 1$. (Với cách nói này, ta luôn hiểu rằng $x = 3$ và $y = 5$.)

➢ ***Chú ý.*** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, mỗi nghiệm của phương trình (1) được biểu diễn bởi một điểm. Nghiệm $(x_0 ; y_0)$ được biểu diễn bởi điểm có toạ độ $(x_0 ; y_0)$.

?1 *a) Kiểm tra xem các cặp số* (1 ; 1) *và* (0,5 ; 0) *có là nghiệm của phương trình* $2x - y = 1$ *hay không.*

b) Tìm thêm một nghiệm khác của phương trình $2x - y = 1$.

?2 *Nêu nhận xét về số nghiệm của phương trình* $2x - y = 1$.

• Đối với phương trình bậc nhất hai ẩn, khái niệm *tập nghiệm* và khái niệm *phương trình tương đương* cũng tương tự như đối với phương trình một ẩn. Ngoài ra, ta vẫn có thể áp dụng *quy tắc chuyển vế* và *quy tắc nhân* đã học để biến đổi phương trình bậc nhất hai ẩn.

2. Tập nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn

• Xét phương trình

$$2x - y = 1. \qquad (2)$$

Chuyển vế, ta có $2x - y = 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1$.

?3 *Điền vào bảng sau và viết ra sáu nghiệm của phương trình* (2) *:*

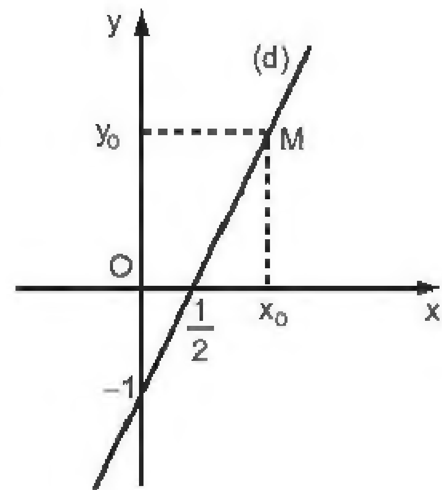
x	−1	0	0,5	1	2	2,5
y = 2x − 1						

Một cách tổng quát, nếu cho x một giá trị bất kì thì cặp số (x ; y), trong đó y = 2x – 1, là một nghiệm của phương trình (2). Như vậy, tập nghiệm của (2) là

$$S = \{(x\ ;\ 2x - 1) \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

Ta nói rằng phương trình (2) có nghiệm tổng quát là (x ; 2x – 1) với x tuỳ ý ($x \in \mathbf{R}$), hoặc

$$\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = 2x - 1 \end{cases}. \qquad (3)$$



Hình 1

Có thể chứng minh rằng : Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, *tập hợp các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình (2) là đường thẳng* y = 2x – 1 (đường thẳng (d) trên hình 1). Ta nói :

Tập nghiệm của (2) *được biểu diễn bởi đường thẳng* (d), hay *đường thẳng* (d) *được xác định bởi phương trình* 2x – y = 1.

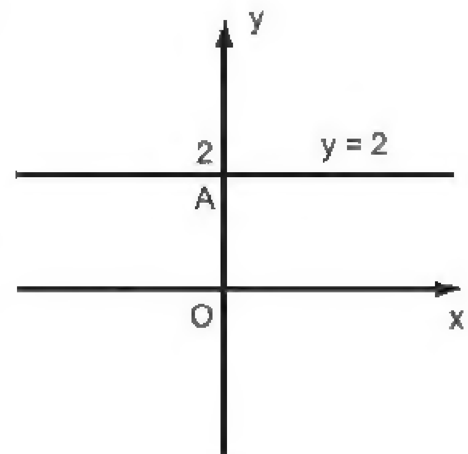
Đường thẳng (d) còn gọi là đường thẳng 2x – y = 1 và được viết gọn là

$$(d) : 2x - y = 1.$$

• Xét phương trình 0x + 2y = 4. (4)

Vì (4) nghiệm đúng với mọi x và y = 2 nên nó có nghiệm tổng quát là (x ; 2) với $x \in \mathbf{R}$, hay

$$\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = 2 \end{cases}.$$



Hình 2

Trong mặt phẳng toạ độ, tập nghiệm của (4) được biểu diễn bởi đường thẳng đi qua điểm A(0 ; 2) và song song với trục hoành (h. 2). Ta gọi đó là đường thẳng y = 2.

• Xét phương trình 4x + 0y = 6. (5)

Vì (5) nghiệm đúng với x = 1,5 và với mọi y nên nó có nghiệm tổng quát là (1,5 ; y) với $y \in \mathbf{R}$, hay

$$\begin{cases} x = 1,5 \\ y \in \mathbf{R} \end{cases}.$$

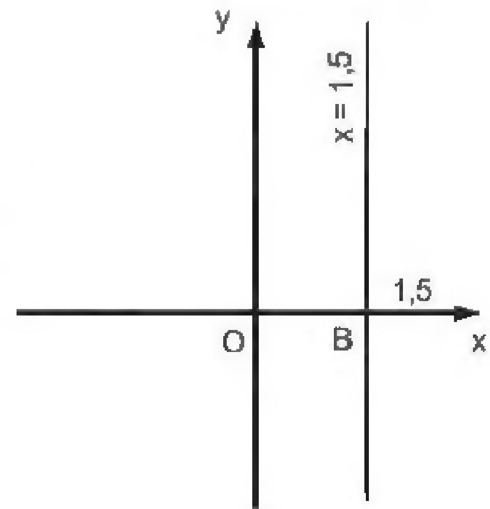
Trong mặt phẳng toạ độ, tập nghiệm của (5) được biểu diễn bởi đường thẳng đi qua điểm B(1,5 ; 0) và song song với trục tung (h. 3). Ta gọi đó là đường thẳng x = 1,5.

Một cách tổng quát, ta có :

1) Phương trình bậc nhất hai ẩn ax + by = c luôn luôn có vô số nghiệm. Tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi đường thẳng ax + by = c, kí hiệu là (d).

2) Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì đường thẳng (d) chính là *đồ thị của hàm số bậc nhất*

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$



Hình 3

Nếu $a \neq 0$ và $b = 0$ thì phương trình trở thành ax = c hay $x = \frac{c}{a}$, và đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục tung.

Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$ thì phương trình trở thành by = c hay $y = \frac{c}{b}$, và đường thẳng (d) song song hoặc trùng với trục hoành.

Bài tập

1. Trong các cặp số (−2 ; 1), (0 ; 2), (−1 ; 0), (1,5 ; 3) và (4 ; −3), cặp số nào là nghiệm của phương trình :

a) 5x + 4y = 8 ?   b) 3x + 5y = −3 ?

2. Với mỗi phương trình sau, tìm nghiệm tổng quát của phương trình và vẽ đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của nó :

a) 3x − y = 2 ;   b) x + 5y = 3 ;

c) 4x − 3y = −1 ;   d) x + 5y = 0 ;

e) 4x + 0y = −2 ;   f) 0x + 2y = 5.

3. Cho hai phương trình x + 2y = 4 và x − y = 1. Vẽ hai đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của hai phương trình đó trên cùng một hệ toạ độ. Xác định toạ độ giao điểm của hai đường thẳng và cho biết toạ độ của nó là nghiệm của các phương trình nào.



Có thể em chưa biết ?

Đối với phương trình bậc nhất hai ẩn dạng

$$ax + by = c \ (a, b, c \in \mathbb{Z}), \qquad (1)$$

người ta còn đặt vấn đề tìm các *nghiệm nguyên* của nó. Tiêu biểu trong lĩnh vực này là nhà toán học Hi Lạp Đi-ô-phăng (Diophantus, khoảng năm 250). Ở Ấn Độ, A-ri-a-ba-ta (Aryabhata, khoảng 476 – 550) cũng đã quan tâm đến việc tìm các nghiệm nguyên của phương trình này ; nhưng người đã cho lời giải tổng quát của bài toán là Bra-ma-gup-ta (Bramahgupta, khoảng 598 – 660). Ngày nay, ta đã biết lời giải của bài toán này qua hai mệnh đề sau :

1) Nếu phương trình (1) có nghiệm nguyên thì c chia hết cho ước chung lớn nhất của a và b.

2) Ngược lại, nếu c chia hết cho ước chung lớn nhất của a và b thì (1) luôn có nghiệm nguyên. Trong trường hợp này, ta có thể giả thiết rằng a, b nguyên tố cùng nhau. Khi đó, nếu $(x_0 ; y_0)$ là một nghiệm nguyên của (1) thì công thức sau cho tất cả các nghiệm nguyên của (1) :

$$\begin{cases} x = x_0 + tb \\ y = y_0 - ta \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{Z}).$$

Để thấy được ý nghĩa hình học của bài toán này, trong mặt phẳng toạ độ, ta gọi các điểm có toạ độ nguyên là các *điểm nguyên*. Khi đó, bài toán trên có nghĩa là : Tìm tất cả các điểm nguyên trên đường thẳng ax + by = c.

§2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

> Có thể tìm nghiệm của một hệ phương trình bằng cách vẽ hai đường thẳng được không ?

1. Khái niệm về hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Xét hai phương trình bậc nhất hai ẩn 2x + y = 3 và x – 2y = 4.

?1 *Kiểm tra rằng cặp số* (x ; y) = (2 ; –1) *vừa là nghiệm của phương trình thứ nhất, vừa là nghiệm của phương trình thứ hai.*

Ta nói rằng cặp số (2 ; –1) là *một nghiệm của hệ phương trình*

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}.$$

Tổng quát, cho hai phương trình bậc nhất hai ẩn ax + by = c và a'x + b'y = c'. Khi đó, ta có hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\text{(I)} \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}.$$

Nếu hai phương trình ấy có nghiệm chung $(x_0 ; y_0)$ thì $(x_0 ; y_0)$ được gọi là một *nghiệm* của hệ (I).

Nếu hai phương trình đã cho không có nghiệm chung thì ta nói hệ (I) *vô nghiệm*.

Giải hệ phương trình là tìm tất cả các nghiệm (tìm *tập nghiệm*) của nó.

2. Minh hoạ hình học tập nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

?2 *Tìm từ thích hợp để điền vào chỗ trống (...) trong câu sau :*

Nếu điểm M *thuộc đường thẳng* ax + by = c *thì toạ độ* $(x_0 ; y_0)$ *của điểm* M *là một ... của phương trình* ax + by = c.

Từ đó suy ra :

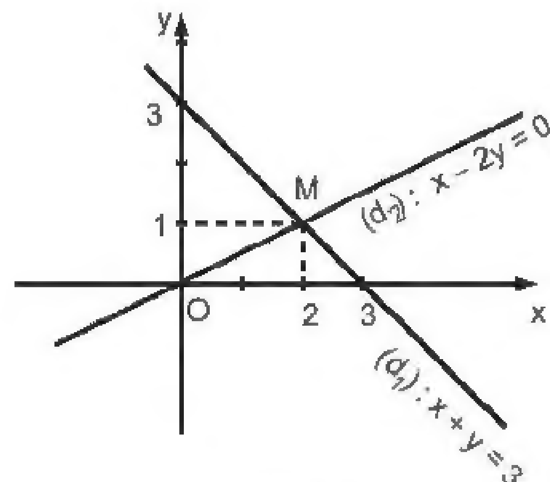
Trên mặt phẳng toạ độ, nếu gọi (d) là đường thẳng ax + by = c và (d') là đường thẳng a'x + b'y = c' thì điểm chung (nếu có) của hai đường thẳng ấy có toạ độ là nghiệm chung của hai phương trình của (I). Vậy, *tập nghiệm của hệ phương trình* (I) *được biểu diễn bởi tập hợp các điểm chung của* (d) *và* (d').

Ví dụ 1. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 2y = 0 \end{cases}.$$

Gọi hai đường thẳng xác định bởi hai phương trình trong hệ đã cho lần lượt là (d_1) và (d_2).

Vẽ (d_1) và (d_2) trong cùng một hệ trục toạ độ (h. 4), ta thấy chúng



Hình 4

cát nhau tại một điểm duy nhất M. Ta xác định được toạ độ của điểm M là (2 ; 1). (Thử lại, ta thấy (2 ; 1) là một nghiệm của hệ).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất (x ; y) = (2 ; 1).

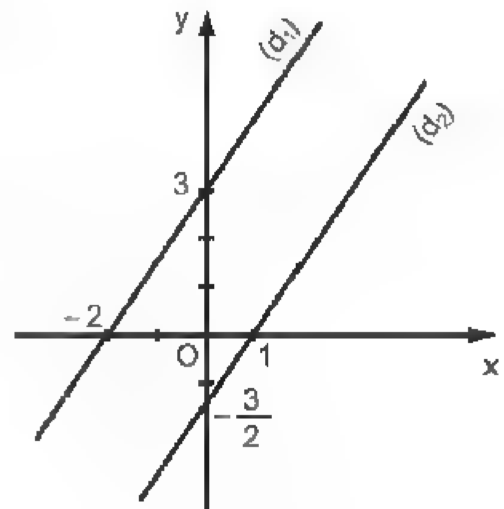
Ví dụ 2. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x - 2y = -6 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}.$$

Do $3x - 2y = -6 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + 3$ nên tập nghiệm của phương trình thứ nhất được biểu diễn bởi đường thẳng $(d_1) : y = \frac{3}{2}x + 3$

Tương tự, tập nghiệm của phương trình thứ hai được biểu diễn bởi đường thẳng $(d_2) : y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$.

Hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có tung độ gốc khác nhau và có cùng hệ số góc bằng $\frac{3}{2}$ nên song song với nhau (h. 5). Chúng không có điểm chung. Điều đó chứng tỏ hệ đã cho vô nghiệm.



Hình 5

Ví dụ 3. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -2x + y = -3 \end{cases}.$$

Ta thấy tập nghiệm của hai phương trình trong hệ được biểu diễn bởi cùng một đường thẳng y = 2x – 3. Vậy, *mỗi nghiệm của một trong hai phương trình của hệ cũng là một nghiệm của phương trình kia.*

?3 *Hệ phương trình trong ví dụ 3 có bao nhiêu nghiệm ? Vì sao ?*

Một cách tổng quát, ta có :

Đối với hệ phương trình (I), ta có :

– Nếu (d) cắt (d') thì hệ (I) có một nghiệm duy nhất.

– Nếu (d) song song với (d') thì hệ (I) vô nghiệm.

– Nếu (d) trùng với (d') thì hệ (I) có vô số nghiệm.

➤ ***Chú ý.*** Từ kết quả trên ta thấy, có thể đoán nhận số nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn (I) bằng cách xét vị trí tương đối của các đường thẳng $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$.

3. Hệ phương trình tương đương

Tương tự như đối với phương trình, ta có :

ĐỊNH NGHĨA

Hai hệ phương trình được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Ta cũng dùng kí hiệu "⇔" để chỉ sự tương đương của hai hệ phương trình, chẳng hạn ta viết

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}.$$

Bài tập

4. Không cần vẽ hình, hãy cho biết số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau đây và giải thích vì sao :

a) $\begin{cases} y = 3 - 2x \\ y = 3x - 1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + 3 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2y = -3x \\ 3y = 2x \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - \dfrac{1}{3}y = 1 \end{cases}$.

5. Đoán nhận số nghiệm của các hệ phương trình sau bằng hình học :

a) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + y = 1 \end{cases}$.

6. ***Đố***

Bạn Nga nhận xét : Hai hệ phương trình bậc nhất hai ẩn vô nghiệm thì luôn tương đương với nhau.

Bạn Phương khẳng định : Hai hệ phương trình bậc nhất hai ẩn cùng có vô số nghiệm thì cũng luôn tương đương với nhau.

Theo em, các ý kiến đó đúng hay sai ? Vì sao ? (có thể cho một ví dụ hoặc minh hoạ bằng đồ thị)

Luyện tập

7. Cho hai phương trình $2x + y = 4$ và $3x + 2y = 5$.

a) Tìm nghiệm tổng quát của mỗi phương trình trên.

b) Vẽ các đường thẳng biểu diễn tập nghiệm của hai phương trình trong cùng một hệ trục toạ độ, rồi xác định nghiệm chung của chúng.

8. Cho các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} x = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2y = 4 \end{cases}$.

Trước hết, hãy đoán nhận số nghiệm của mỗi hệ phương trình trên (giải thích rõ lí do). Sau đó, tìm tập nghiệm của các hệ đã cho bằng cách vẽ hình

9. Đoán nhận số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau, giải thích vì sao :

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -6x + 4y = 0 \end{cases}$.

10. Đoán nhận số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau, giải thích vì sao :

a) $\begin{cases} 4x - 4y = 2 \\ -2x + 2y = -1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - y = \frac{2}{3} \\ x - 3y = 2 \end{cases}$.

11. Nếu tìm thấy hai nghiệm phân biệt của một hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn (nghĩa là hai nghiệm được biểu diễn bởi hai điểm phân biệt) thì ta có thể nói gì về số nghiệm của hệ phương trình đó ? Vì sao ?

§3. Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

Phải chăng chỉ là quy về giải phương trình một ẩn ?

Nói chung, muốn giải một hệ phương trình hai ẩn, ta tìm cách biến đổi hệ phương trình đã cho để được một hệ phương trình mới tương đương, trong đó một phương trình của nó chỉ còn một ẩn. Một trong các cách giải là áp dụng quy tắc sau gọi là *quy tắc thế*.

1. Quy tắc thế

Quy tắc thế dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương. Quy tắc thế gồm hai bước sau :

Bước 1. Từ một phương trình của hệ đã cho (coi là phương trình thứ nhất), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào *phương trình thứ hai* để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).

Bước 2. Dùng phương trình mới ấy để *thay thế cho phương trình thứ hai* trong hệ (phương trình thứ nhất cũng thường được thay thế bởi hệ thức biểu diễn một ẩn theo ẩn kia có được ở bước 1).

Ví dụ 1. Xét hệ phương trình

$$\text{(I)}\ \begin{cases} x - 3y = 2 \\ -2x + 5y = 1 \end{cases}.$$

Việc áp dụng quy tắc thế đối với hệ (I) như sau :

Bước 1. Từ phương trình đầu, biểu diễn x theo y, ta có $x = 3y + 2$ (*). Lấy kết quả này thế vào chỗ của x trong phương trình thứ hai thì được

$$-2(3y + 2) + 5y = 1\ .$$

Bước 2. Dùng phương trình vừa có, thay thế cho phương trình thứ hai của hệ và dùng (*) thay thế cho phương trình thứ nhất, ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 3y + 2 \\ -2(3y + 2) + 5y = 1 \end{cases}.$$

- Sau khi đã áp dụng quy tắc thế, ta thấy ngay có thể giải hệ (I) như sau :

$$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 2 \\ -2(3y + 2) + 5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 2 \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ y = -5 \end{cases}.$$

Vậy hệ (I) có nghiệm duy nhất là $(-13\ ;\ -5)$.

Cách giải như trên gọi là *giải hệ phương trình bằng phương pháp thế*.

2. Áp dụng

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình

$$(\text{II})\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}.$$

Giải. Ta có (biểu diễn y theo x từ phương trình thứ nhất)

$$(\text{II}) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x + 2(2x - 3) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 5x - 6 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy hệ (II) có nghiệm duy nhất là (2 ; 1).

?1 *Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp thế (biểu diễn y theo x từ phương trình thứ hai của hệ)*

$$\begin{cases} 4x - 5y = 3 \\ 3x - y = 16 \end{cases}.$$

➤ *Chú ý*

Nếu trong quá trình giải hệ phương trình bằng phương pháp thế, ta thấy xuất hiện phương trình có các hệ số của cả hai ẩn đều bằng 0 thì hệ phương trình đã cho có thể có vô số nghiệm hoặc vô nghiệm.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình

$$(\text{III})\begin{cases} 4x - 2y = -6 \\ -2x + y = 3 \end{cases}$$

Giải

+ Biểu diễn y theo x từ phương trình thứ hai, ta được $y = 2x + 3$.

+ Thế y trong phương trình đầu bởi $2x + 3$, ta có

$$4x - 2(2x + 3) = -6 \Leftrightarrow 0x = 0.$$

Phương trình này nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbf{R}$. Vậy hệ (III) có vô số nghiệm. Cụ thể, tập nghiệm của nó cũng là tập nghiệm của phương trình bậc nhất

hai ẩn $y = 2x + 3$. Do đó, hệ (III) có các nghiệm $(x\ ;\ y)$ tính bởi công thức

$$\begin{cases} x \in \mathbf{R} \\ y = 2x + 3. \end{cases}$$

?2 *Bằng minh hoạ hình học, hãy giải thích tại sao hệ* (III) *có vô số nghiệm.*

?3 *Cho hệ phương trình*

$$\text{(IV)} \begin{cases} 4x + y = 2 \\ 8x + 2y = 1 \end{cases}.$$

Bằng minh hoạ hình học và bằng phương pháp thế, chứng tỏ rằng hệ (IV) *vô nghiệm.*

Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

1) Dùng quy tắc thế biến đổi hệ phương trình đã cho để được một hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình một ẩn.

2) Giải phương trình một ẩn vừa có, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

Bài tập

Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế :

12. a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 7x - 3y = 5 \\ 4x + y = 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 5x - 4y = 11 \end{cases}$.

13. a) $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 1 \\ 5x - 8y = 3 \end{cases}$.

14. a) $\begin{cases} x + y\sqrt{5} = 0 \\ x\sqrt{5} + 3y = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$; b) $\begin{cases} (2 - \sqrt{3})x - 3y = 2 + 5\sqrt{3} \\ 4x + y = 4 - 2\sqrt{3} \end{cases}$.

Luyện tập

15. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ (a^2 + 1)x + 6y = 2a \end{cases}$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $a = -1$; b) $a = 0$; c) $a = 1$.

Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế (các bài 16 và 17) :

16. a) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x - y = -8 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3} \\ x + y - 10 = 0 \end{cases}$.

17. a) $\begin{cases} x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 1 \\ x + y\sqrt{3} = \sqrt{2} \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - 2\sqrt{2}y = \sqrt{5} \\ x\sqrt{2} + y = 1 - \sqrt{10} \end{cases}$; c) $\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x - y = \sqrt{2} \\ x + (\sqrt{2} + 1)y = 1 \end{cases}$.

18. a) Xác định các hệ số a và b, biết rằng hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x + by = -4 \\ bx - ay = -5 \end{cases}$$

có nghiệm là $(1 ; -2)$.

b) Cũng hỏi như vậy, nếu hệ phương trình có nghiệm là $(\sqrt{2} - 1 ; \sqrt{2})$.

19. Biết rằng : *Đa thức* $P(x)$ *chia hết cho đa thức* $x - a$ *khi và chỉ khi* $P(a) = 0$. Hãy tìm các giá trị của m và n sao cho đa thức sau đồng thời chia hết cho $x + 1$ và $x - 3$:

$$P(x) = mx^3 + (m - 2)x^2 - (3n - 5)x - 4n.$$

§4. Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

Ta đã biết, muốn giải một hệ phương trình hai ẩn, ta tìm cách quy về việc giải phương trình một ẩn. Mục đích đó cũng có thể đạt được bằng cách áp dụng quy tắc sau gọi là *quy tắc cộng đại số*.

1. Quy tắc cộng đại số

Quy tắc cộng đại số dùng để biến đổi một hệ phương trình thành hệ phương trình tương đương. Quy tắc cộng đại số gồm hai bước sau :

Bước 1. Cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình đã cho để được một phương trình mới.

Bước 2. Dùng phương trình mới ấy *thay thế cho một trong hai phương trình của hệ* (và giữ nguyên phương trình kia).

Ví dụ 1. Xét hệ phương trình

$$(\text{I})\begin{cases}2x - y = 1\\ x + y = 2\end{cases}$$

Ta áp dụng quy tắc cộng đại số để biến đổi hệ (I) như sau .

Bước 1. Cộng từng vế hai phương trình của (I), ta được phương trình $(2x - y) + (x + y) = 3$ hay $3x = 3$.

Bước 2. Dùng phương trình mới đó thay thế cho phương trình thứ nhất, ta được hệ $\begin{cases}3x = 3\\ x + y = 2\end{cases}$; hoặc thay thế cho phương trình thứ hai, ta được hệ $\begin{cases}2x - y = 1\\ 3x = 3\end{cases}$.

?1 *Áp dụng quy tắc cộng đại số để biến đổi hệ (I), nhưng ở bước 1, hãy trừ từng vế hai phương trình của hệ (I) và viết ra các hệ phương trình mới thu được.*

• Sau đây, ta sẽ tìm cách sử dụng quy tắc cộng đại số để giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn. Cách làm đó gọi là *giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số*.

2. Áp dụng

1) Trường hợp thứ nhất

(Các hệ số của cùng một ẩn nào đó trong hai phương trình bằng nhau hoặc đối nhau).

Ví dụ 2. Xét hệ phương trình

$$(\text{II})\begin{cases}2x + y = 3\\ x - y = 6\end{cases}$$

?2 *Các hệ số của y trong hai phương trình của hệ* (II) *có đặc điểm gì ?*

Từ đặc điểm đó, ta có thể giải hệ (II) như sau :

Cộng từng vế hai phương trình của hệ (II), ta được

$$3x = 9 \Leftrightarrow x = 3.$$

Do đó

$$(\text{II}) \Leftrightarrow \begin{cases}3x = 9\\ x - y = 6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 3\\ x - y = 6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 3\\ y = -3\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x ; y) = (3 ; -3)$.

Ví dụ 3. Xét hệ phương trình

$$\text{(III)} \begin{cases} 2x + 2y = 9 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}.$$

?3 *a) Nêu nhận xét về các hệ số của* x *trong hai phương trình của hệ* (III).

b) Áp dụng quy tắc cộng đại số, hãy giải hệ (III) *bằng cách trừ từng vế hai phương trình của* (III).

2) Trường hợp thứ hai

(Các hệ số của cùng một ẩn trong hai phương trình không bằng nhau và không đối nhau)

Ví dụ 4. Xét hệ phương trình

$$\text{(IV)} \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}.$$

Ta sẽ tìm cách biến đổi để đưa hệ (IV) về trường hợp thứ nhất. Muốn vậy, nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 2 và hai vế của phương trình thứ hai với 3, ta có hệ tương đương :

$$\text{(IV)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6x + 4y = 14 \\ 6x + 9y = 9 \end{cases}.$$

?4 *Giải tiếp hệ* (IV) *bằng phương pháp đã nêu ở trường hợp thứ nhất.*

?5 *Nêu một cách khác để đưa hệ phương trình* (IV) *về trường hợp thứ nhất ?*

Tóm tắt cách giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

1) Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ bằng nhau hoặc đối nhau

2) Áp dụng quy tắc cộng đại số để được hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình mà hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình một ẩn)

3) Giải phương trình một ẩn vừa thu được rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

Bài tập

Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số :

20. a) $\begin{cases} 3x + y = 3 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$; e) $\begin{cases} 0,3x + 0,5y = 3 \\ 1,5x - 2y = 1,5 \end{cases}$.

21. a) $\begin{cases} x\sqrt{2} - 3y = 1 \\ 2x + y\sqrt{2} = -2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 5x\sqrt{3} + y = 2\sqrt{2} \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2 \end{cases}$.

Luyện tập

22. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số :

a) $\begin{cases} -5x + 2y = 4 \\ 6x - 3y = -7 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ -4x + 6y = 5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ x - \frac{2}{3}y = 3\frac{1}{3} \end{cases}$.

23. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} (1 + \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2})y = 5 \\ (1 + \sqrt{2})x + (1 + \sqrt{2})y = 3 \end{cases}.$$

24. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 2(x + y) + 3(x - y) = 4 \\ (x + y) + 2(x - y) = 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2(x - 2) + 3(1 + y) = -2 \\ 3(x - 2) - 2(1 + y) = -3 \end{cases}$.

25. Ta biết rằng : *Một đa thức bằng đa thức* 0 *khi và chỉ khi tất cả các hệ số của nó bằng* 0. Hãy tìm các giá trị của m và n để đa thức sau (với biến số x) bằng đa thức 0 :

$$P(x) = (3m - 5n + 1)x + (4m - n - 10)$$

26. Xác định a và b để đồ thị của hàm số $y = ax + b$ đi qua hai điểm A và B trong mỗi trường hợp sau :

a) A(2 ; −2) và B(−1 ; 3) ; b) A(−4 ; −2) và B(2 ; 1) ;

c) A(3 ; −1) và B(−3 ; 2) ; d) A($\sqrt{3}$; 2) và B(0 ; 2).

27. Bằng cách đặt ẩn phụ (theo hướng dẫn), đưa các hệ phương trình sau về dạng hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn rồi giải :

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 1 \\ \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} = 5 \end{cases}$. *Hướng dẫn.* Đặt $u = \dfrac{1}{x}$, $v = \dfrac{1}{y}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{y-1} = 2 \\ \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{3}{y-1} = 1 \end{cases}$. *Hướng dẫn.* Đặt $u = \dfrac{1}{x-2}$, $v = \dfrac{1}{y-1}$.

§5. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

?1 *Hãy nhắc lại các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình.*

Để giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình, chúng ta cũng làm tương tự.

Ví dụ 1. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng hai lần chữ số hàng đơn vị lớn hơn chữ số hàng chục 1 đơn vị, và nếu viết hai chữ số ấy theo thứ tự ngược lại thì được một số mới (có hai chữ số) bé hơn số cũ 27 đơn vị

Cách giải

Trong bài toán trên, ta thấy có hai đại lượng chưa biết là chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị của số cần tìm. Theo giả thiết, khi viết hai chữ số ấy theo thứ tự ngược lại, ta vẫn được một số có hai chữ số. Điều đó chứng tỏ rằng cả hai chữ số ấy đều phải khác 0.

Vậy ta có thể giải bài toán đã cho như sau :

Gọi chữ số hàng chục của số cần tìm là x, chữ số hàng đơn vị là y. Điều kiện của ẩn là . x và y là những số nguyên, $0 < x \leq 9$ và $0 < y \leq 9$. Khi đó, số cần tìm là $10x + y$. Khi viết hai chữ số theo thứ tự ngược lại, ta được số $10y + x$.

Theo điều kiện đầu, ta có : $2y - x = 1$ hay $-x + 2y = 1$.

Theo điều kiện sau, ta có : $(10x + y) \quad (10y + x) \quad 27 \Leftrightarrow 9x \quad 9y \quad 27$ hay $x - y - 3$.

Từ đó, ta có hệ phương trình

$$(I) \begin{cases} x + 2y \quad 1 \\ x - \quad y = 3 \end{cases}.$$

?2 *Giải hệ phương trình* (I) *và trả lời bài toán đã cho.*

Ví dụ 2. Một chiếc xe tải đi từ TP.Hồ Chí Minh đến TP. Cần Thơ, quãng đường dài 189 km. Sau khi xe tải xuất phát 1 giờ, một chiếc xe khách bắt đầu đi từ TP. Cần Thơ về TP. Hồ Chí Minh và gặp xe tải sau khi đã đi được 1 giờ 48 phút Tính vận tốc của mỗi xe, biết rằng mỗi giờ xe khách đi nhanh hơn xe tải 13 km.

Cách giải

Từ giả thiết của bài toán, ta thấy khi hai xe gặp nhau thì :

Thời gian xe khách đã đi là 1 giờ 48 phút, tức là $\frac{9}{5}$ giờ.

Thời gian xe tải đã đi là 1 giờ + $\frac{9}{5}$ giờ $\quad \frac{14}{5}$ giờ (vì xe tải khởi hành trước xe khách 1 giờ).

Gọi vận tốc của xe tải là x (km/h) và vận tốc của xe khách là y (km/h). Điều kiện của ẩn là x và y là những số dương.

Ta tiếp tục giải bài toán này bằng cách thực hiện các hoạt động sau :

?3 *Lập phương trình biểu thị giả thiết : Mỗi giờ, xe khách đi nhanh hơn xe tải* 13 *km.*

?4 *Viết các biểu thức chứa ẩn biểu thị quãng đường mỗi xe đi được, tính đến khi hai xe gặp nhau. Từ đó suy ra phương trình biểu thị giả thiết quãng đường từ TP. Hồ Chí Minh đến TP. Cần Thơ dài* 189 *km.*

?5 *Giải hệ hai phương trình thu được trong* **?3** *và* **?4** *rồi trả lời bài toán.*

Bài tập

28. Tìm hai số tự nhiên, biết rằng tổng của chúng bằng 1006 và nếu lấy số lớn chia cho số nhỏ thì được thương là 2 và số dư là 124.

29. Giải bài toán cổ sau :

Quýt, cam mười bảy quả tươi
Đem chia cho một trăm người cùng vui.
Chia ba mỗi quả quýt rồi
Còn cam mỗi quả chia mười vừa xinh.
Trăm người, trăm miếng ngọt lành.
Quýt, cam mỗi loại tính rành là bao ?

30. Một ôtô đi từ A và dự định đến B lúc 12 giờ trưa. Nếu xe chạy với vận tốc 35 km/h thì sẽ đến B chậm 2 giờ so với dự định. Nếu xe chạy với vận tốc 50 km/h thì sẽ đến B sớm 1 giờ so với dự định. Tính độ dài quãng đường AB và thời điểm xuất phát của ôtô tại A.

§6. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình
(Tiếp theo)

Ví dụ 3. Hai đội công nhân cùng làm một đoạn đường trong 24 ngày thì xong. Mỗi ngày, phần việc đội A làm được nhiều gấp rưỡi đội B. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội làm xong đoạn đường đó trong bao lâu ?

Cách giải

Từ giả thiết hai đội cùng làm trong 24 ngày thì xong cả đoạn đường (và được xem là xong 1 công việc), ta suy ra trong một ngày hai đội làm chung được $\frac{1}{24}$ (công việc). Tương tự, số phần công việc mà mỗi đội làm được trong một ngày và số ngày cần thiết để đội đó hoàn thành công việc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch (trong bài toán này, ta hiểu "số ngày" là một đại lượng không nhất thiết phải nguyên).

Vậy ta có thể giải bài toán như sau :

Gọi x là số ngày để đội A làm một mình hoàn thành toàn bộ công việc ; y là số ngày để đội B làm một mình hoàn thành toàn bộ công việc. Điều kiện của ẩn là x và y là những số dương.

Mỗi ngày, đội A làm được $\frac{1}{x}$ (công việc), đội B làm được $\frac{1}{y}$ (công việc).
Do mỗi ngày, phần việc đội A làm được nhiều gấp rưỡi đội B nên ta có phương trình $\frac{1}{x} = 1,5 \cdot \frac{1}{y}$ hay

$$\frac{1}{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{y} \qquad (1)$$

Hai đội làm chung trong 24 ngày thì xong công việc nên mỗi ngày hai đội cùng làm thì được $\frac{1}{24}$ (công việc). Ta có phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{24}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình

$$(\text{II}) \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{y} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{24} \end{cases}.$$

?6 *Giải hệ phương trình* (II) *bằng cách đặt ẩn phụ* $\left(u = \frac{1}{x}; v = \frac{1}{y}\right)$ *rồi trả lời bài toán đã cho.*

?7 *Hãy giải bài toán trên bằng cách khác (gọi* x *là số phần công việc làm trong một ngày của đội* A ; y *là số phần công việc làm trong một ngày của đội* B*). Em có nhận xét gì về cách giải này ?*

Bài tập

31. Tính độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông, biết rằng nếu tăng mỗi cạnh lên 3 cm thì diện tích tam giác đó sẽ tăng thêm 36 cm^2, và nếu một cạnh giảm đi 2 cm, cạnh kia giảm đi 4 cm thì diện tích của tam giác giảm đi 26 cm^2.

32. Hai vòi nước cùng chảy vào một bể nước cạn (không có nước) thì sau $4\frac{4}{5}$ giờ đầy bể. Nếu lúc đầu chỉ mở vòi thứ nhất và 9 giờ sau mới mở thêm vòi thứ hai thì sau $\frac{6}{5}$ giờ nữa mới đầy bể. Hỏi nếu ngay từ đầu chỉ mở vòi thứ hai thì sau bao lâu mới đầy bể ?

33. Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm 3 giờ và người thứ hai làm 6 giờ thì chỉ hoàn thành được 25% công việc. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi người hoàn thành công việc đó trong bao lâu ?

Luyện tập

34. Nhà Lan có một mảnh vườn trồng rau cải bắp. Vườn được đánh thành nhiều luống, mỗi luống trồng cùng một số cây cải bắp. Lan tính rằng : Nếu tăng thêm 8 luống rau, nhưng mỗi luống trồng ít đi 3 cây thì số cây toàn vườn ít đi 54 cây. Nếu giảm đi 4 luống, nhưng mỗi luống trồng tăng thêm 2 cây thì số rau toàn vườn sẽ tăng thêm 32 cây. Hỏi vườn nhà Lan trồng bao nhiêu cây rau cải bắp ?

35. (Bài toán cổ Ấn Độ). Số tiền mua 9 quả thanh yên và 8 quả táo rừng thơm là 107 rupi. Số tiền mua 7 quả thanh yên và 7 quả táo rừng thơm là 91 rupi. Hỏi giá mỗi quả thanh yên và mỗi quả táo rừng thơm là bao nhiêu rupi ?

36. Điểm số trung bình của một vận động viên bắn súng sau 100 lần bắn là 8,69 điểm. Kết quả cụ thể được ghi trong bảng sau, trong đó có hai ô bị mờ không đọc được (đánh dấu *) :

Điểm số của mỗi lần bắn	10	9	8	7	6
Số lần bắn	25	42	*	15	*

Em hãy tìm lại các số trong hai ô đó.

37. Hai vật chuyển động đều trên một đường tròn đường kính 20 cm, xuất phát cùng một lúc, từ cùng một điểm. Nếu chuyển động cùng chiều thì cứ 20 giây chúng lại gặp nhau. Nếu chuyển động ngược chiều thì cứ 4 giây chúng lại gặp nhau. Tính vận tốc của mỗi vật.

38. Nếu hai vòi nước cùng chảy vào một bể nước cạn (không có nước) thì bể sẽ đầy trong 1 giờ 20 phút. Nếu mở vòi thứ nhất trong 10 phút và vòi thứ hai trong 12 phút thì chỉ được $\frac{2}{15}$ bể nước. Hỏi nếu mở riêng từng vòi thì thời gian để mỗi vòi chảy đầy bể là bao nhiêu ?

39. Một người mua hai loại hàng và phải trả tổng cộng 2,17 triệu đồng, kể cả thuế giá trị gia tăng (VAT) với mức 10% đối với loại hàng thứ nhất và 8% đối với loại hàng thứ hai. Nếu thuế VAT là 9% đối với cả hai loại hàng thì người đó phải trả tổng cộng 2,18 triệu đồng. Hỏi nếu không kể thuế VAT thì người đó phải trả bao nhiêu tiền cho mỗi loại hàng ?

Ôn tập chương III

Câu hỏi

1. Sau khi giải hệ $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$, bạn Cường kết luận rằng hệ phương trình có hai nghiệm : $x = 2$ và $y = 1$. Theo em điều đó đúng hay sai ? Nếu sai thì phải phát biểu thế nào cho đúng ?

2. Dựa vào minh hoạ hình học (xét vị trí tương đối của hai đường thẳng xác định bởi hai phương trình trong hệ), em hãy giải thích các kết luận sau :

Hệ phương trình $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ (a, b, c, a', b', c' khác 0)

- Có vô số nghiệm nếu $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$;
- Vô nghiệm nếu $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$;
- Có một nghiệm duy nhất nếu $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$

3. Khi giải một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, ta biến đổi hệ phương trình đó để được một hệ phương trình mới tương đương, trong đó có một phương trình một ẩn. Có thể nói gì về số nghiệm của hệ đã cho nếu phương trình một ẩn đó :

a) Vô nghiệm ?

b) Có vô số nghiệm ?

Tóm tắt các kiến thức cần nhớ

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn x và y có dạng $ax + by = c$, trong đó a, b và c là các số đã biết với $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$.

2. Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn có vô số nghiệm. Trong mặt phẳng toạ độ, tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi đường thẳng $ax + by = c$

3. Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp thế :

a) Dùng quy tắc thế biến đổi hệ phương trình đã cho để được một hệ phương trình mới, trong đó có một phương trình một ẩn.

b) Giải phương trình một ẩn vừa có rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

4. Giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng phương pháp cộng đại số :

a) Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của cùng một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ là bằng nhau hoặc đối nhau.

b) Áp dụng quy tắc cộng đại số để được một hệ phương trình mới, trong đó một phương trình có hệ số của một trong hai ẩn bằng 0 (tức là phương trình một ẩn).

c) Giải phương trình một ẩn vừa có rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

5. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình.

Bước 1. Lập hệ phương trình :

– Chọn hai ẩn và đặt điều kiện thích hợp cho chúng.

– Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo các ẩn và các đại lượng đã biết.

– Lập hai phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2. Giải hệ hai phương trình nói trên.

Bước 3. Trả lời : Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thích hợp với bài toán và kết luận.

Bài tập

40. Giải các hệ phương trình sau và minh hoạ hình học kết quả tìm được .

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 2 \\ \frac{2}{5}x + y = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 0,2x + 0,1y = 0,3 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \frac{3}{2}x - y = \frac{1}{2} \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$.

41. Giải các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} x\sqrt{5} - (1 + \sqrt{3})y = 1 \\ (1 - \sqrt{3})x + y\sqrt{5} = 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{2x}{x+1} + \dfrac{y}{y+1} = \sqrt{2} \\ \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{3y}{y+1} = -1 \end{cases}$.

Hướng dẫn câu b) : Đặt ẩn phụ.

42. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y = m \\ 4x - m^2y = 2\sqrt{2} \end{cases}$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $m = -\sqrt{2}$; b) $m = \sqrt{2}$; c) $m = 1$.

43. Hai người ở hai địa điểm A và B cách nhau 3,6 km, khởi hành cùng một lúc, đi ngược chiều nhau và gặp nhau ở một địa điểm cách A là 2 km. Nếu cả hai cùng giữ nguyên vận tốc như trường hợp trên, nhưng người đi chậm hơn xuất phát trước người kia 6 phút thì họ sẽ gặp nhau ở chính giữa quãng đường. Tính vận tốc của mỗi người.

44. Một vật có khối lượng 124 g và thể tích 15 cm^3 là hợp kim của đồng và kẽm. Tính xem trong đó có bao nhiêu gam đồng và bao nhiêu gam kẽm, biết rằng cứ 89 g đồng thì có thể tích là 10 cm^3 và 7 g kẽm có thể tích là 1 cm^3

45. Hai đội xây dựng làm chung một công việc và dự định hoàn thành trong 12 ngày. Nhưng khi làm chung được 8 ngày thì đội I được điều động đi làm việc khác. Tuy chỉ còn một mình đội II làm việc, nhưng do cải tiến cách làm, năng suất của đội II tăng gấp đôi, nên họ đã làm xong phần việc còn lại trong 3,5 ngày Hỏi với năng suất ban đầu, nếu mỗi đội làm một mình thì phải làm trong bao nhiêu ngày mới xong công việc trên ?

46. Năm ngoái, hai đơn vị sản xuất nông nghiệp thu hoạch được 720 tấn thóc. Năm nay, đơn vị thứ nhất làm vượt mức 15%, đơn vị thứ hai làm vượt mức 12% so với năm ngoái. Do đó cả hai đơn vị thu hoạch được 819 tấn thóc. Hỏi mỗi năm, mỗi đơn vị thu hoạch được bao nhiêu tấn thóc ?

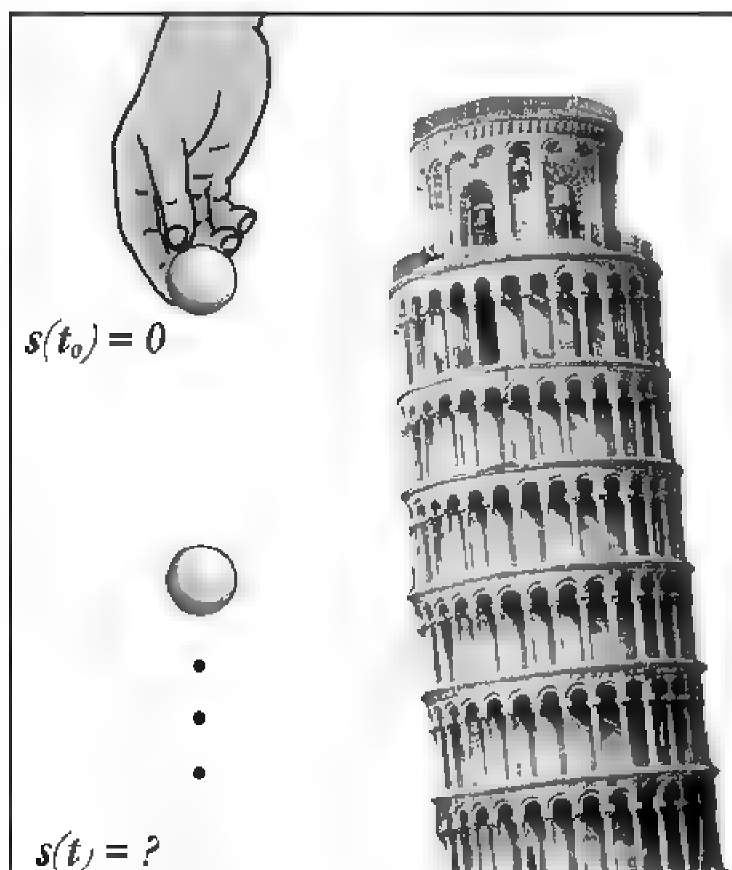
Chương IV HÀM SỐ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Ta đã học hàm số bậc nhất và phương trình bậc nhất. Trong chương này, ta sẽ học hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ và phương trình bậc hai Qua đó, ta thấy rằng chúng có nhiều ứng dụng trong thực tiên.

§1. Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

1. Ví dụ mở đầu

Tại đỉnh tháp nghiêng Pi da (Pisa), ở I-ta-li-a, Ga-li-lê (G. Gallilei) đã thả hai quả cầu bằng chì có trọng lượng khác nhau để làm thí nghiệm nghiên cứu chuyển động của một vật rơi tự do. Ông khẳng định rằng, khi một vật rơi tự do (không kể đến sức cản của không khí), vận tốc của nó tăng dần và không phụ thuộc vào trọng lượng của vật. Quãng đường chuyển động s của nó được biểu diễn gần đúng bởi công thức



$$s = 5t^2,$$

trong đó t là thời gian tính bằng giây, s tính bằng mét.

Theo công thức này, mỗi giá trị của t xác định một giá trị tương ứng duy nhất của s.

Chẳng hạn, bảng sau đây biểu thị vài cặp giá trị tương ứng của t và s

t	1	2	3	4
s	5	20	45	80

Công thức $s = 5t^2$ biểu thị một hàm số có dạng $y = ax^2$ $(a \neq 0)$.

Bây giờ, ta xét tính chất của các hàm số như thế.

2. Tính chất của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

Xét hai hàm số sau :

$$y = 2x^2 \text{ và } y = -2x^2.$$

?1 *Điền vào những ô trống các giá trị tương ứng của y trong hai bảng sau :*

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x^2$	18					8	

x	3	2	1	0	1	2	3
$y = -2x^2$	-18					8	

?2 *Đối với hàm số $y = 2x^2$, nhờ bảng các giá trị vừa tính được, hãy cho biết :*

– Khi x tăng nhưng luôn luôn âm thì giá trị tương ứng của y tăng hay giảm.

– Khi x tăng nhưng luôn luôn dương thì giá trị tương ứng của y tăng hay giảm.

Nhận xét tương tự đối với hàm số $y = -2x^2$.

Tổng quát, hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ xác định với mọi giá trị của x thuộc **R** và người ta chứng minh được nó có tính chất sau đây.

TÍNH CHẤT

Nếu $a > 0$ *thì hàm số nghịch biến* khi $x < 0$ *và đồng biến* khi $x > 0$.

Nếu $a < 0$ *thì hàm số đồng biến* khi $x < 0$ *và nghịch biến* khi $x > 0$.

?3 *Đối với hàm số* $y = 2x^2$, *khi* $x \neq 0$ *giá trị của* y *dương hay âm ? Khi* $x = 0$ *thì sao ?*

Cũng hỏi tương tự đối với hàm số $y = -2x^2$.

Nhận xét

Nếu $a > 0$ *thì* $y > 0$ *với mọi* $x \neq 0$; $y = 0$ *khi* $x = 0$. *Giá trị nhỏ nhất của hàm số là* $y = 0$.

Nếu $a < 0$ *thì* $y < 0$ *với mọi* $x \neq 0$; $y = 0$ *khi* $x = 0$. *Giá trị lớn nhất của hàm số là* $y = 0$.

?4 *Cho hai hàm số* $y = \frac{1}{2}x^2$ *và* $y = -\frac{1}{2}x^2$. *Tính các giá trị tương ứng của* y *rồi điền vào các ô trống tương ứng ở hai bảng sau ; kiểm nghiệm lại nhận xét nói trên :*

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{2}x^2$							

x	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
$y = -\frac{1}{2}x^2$							

Bài tập

1. Diện tích S của hình tròn được tính bởi công thức $S = \pi R^2$, trong đó R là bán kính của hình tròn.

a) Dùng máy tính bỏ túi, tính các giá trị của S rồi điền vào các ô trống trong bảng sau ($\pi \approx 3,14$, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)

R (cm)	0,57	1,37	2,15	4,09
$S = \pi R^2$ (cm^2)				

(Xem bài đọc thêm về máy tính bỏ túi dưới đây).

b) Nếu bán kính tang gấp 3 lần thì diện tích tang hay giảm bao nhiêu lần ?

c) Tính bán kính của hình tròn, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai, nếu biết diện tích của nó bằng 79,5 cm^2.

2. Một vật rơi ở độ cao so với mặt đất là 100 m. Quãng đường chuyển động s (mét) của vật rơi phụ thuộc vào thời gian t (giây) bởi công thức : $s = 4t^2$.

a) Sau 1 giây, vật này cách mặt đất bao nhiêu mét ? Tương tự, sau 2 giây ?

b) Hỏi sau bao lâu vật này tiếp đất ?

3. Lực F của gió khi thổi vuông góc vào cánh buồm tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc v của gió, tức là $F = av^2$ (a là hằng số). Biết rằng khi vận tốc gió bằng 2 m/s thì lực tác động lên cánh buồm của một con thuyền bằng 120 N (Niu-tơn).



a) Tính hằng số a.

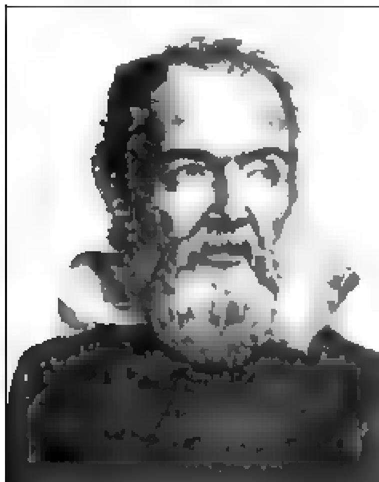
b) Hỏi khi v = 10 m/s thì lực F bằng bao nhiêu ? Cùng câu hỏi này khi v = 20 m/s ?

c) Biết rằng cánh buồm chỉ có thể chịu được một áp lực tối đa là 12 000 N, hỏi con thuyền có thể đi được trong gió bão với vận tốc gió 90 km/h hay không ?



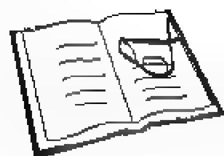
Có thể em chưa biết ?

Cách đây hơn 400 năm, Ga-li-lê (G. Gallilei 1564 – 1642), nhà thiên văn học, nhà triết học người I-ta-li-a đã làm những thí nghiệm đo vận tốc vật rơi. Ngày 24-1-1590, ông dùng hai quả cầu bằng chì, quả này nặng gấp 10 lần quả kia và cho rơi cùng một lúc từ đỉnh tháp nghiêng. Kết quả nhiều lần cho thấy hai quả cầu đều chạm đất cùng một lúc. Ông đã chứng minh rằng vận tốc của vật rơi không phụ thuộc vào trọng lượng của nó (nếu không kể đến sức cản của không khí), quãng đường chuyển động của vật rơi tự do *tỉ lệ thuận với bình phương* của thời gian



G. Galilei

Ga-li-lê đã làm ra kính thiên văn để quan sát bầu trời. Ông chống lại luận thuyết của Ptô-lê-mê cho rằng Trái Đất là trung tâm của vũ trụ và đứng yên, mọi hành tinh đều quay quanh Trái Đất. Ông ủng hộ quan điểm của Cô-péc-ních coi Mặt Trời là trung tâm, Trái Đất và các hành tinh khác như sao Mộc, sao Thổ, sao Thuỷ, sao Hoả, sao Kim, đều quay quanh Mặt Trời. Quan điểm này trái với quan điểm của nhà thờ Thiên Chúa giáo hồi bấy giờ. Vì lẽ đó, ông đã bị toà án của giáo hội xử tội. Mặc dù bị cưỡng bức phải tuyên bố từ bỏ quan điểm của mình, nhưng ngay sau khi toà tuyên phạt, ông vẫn kêu lên rằng : "Nhưng dù sao Trái Đất vẫn quay".



Bài đọc thêm

DÙNG MÁY TÍNH BỎ TÚI CASIO *fx - 220* ĐỂ TÍNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

Ví dụ 1. Tính giá trị của biểu thức $A = 3x^2 - 3,5x + 2$ với $x = 4,13$.

Cách 1. Thay x = 4,13 vào biểu thức :

$A = \boxed{3}\boxed{\times}\boxed{4}\boxed{.}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{x^2}\boxed{-}\boxed{3}\boxed{.}\boxed{5}\boxed{\times}\boxed{4}\boxed{.}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{+}\boxed{2}\boxed{=}$

Kết quả : A = 38,7157.

Cách 2. Vì số 4,13 có tới bốn kí tự và được lặp lại nhiều lần nên để tiết kiệm thao tác, ta có thể dùng *phím nhớ* $\boxed{\text{Min}}$ để lưu nó lại trong máy và *phím gọi nhớ* $\boxed{\text{MR}}$ khi cần nó. Thực hiện như sau :

$A = \boxed{4}\boxed{.}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{\text{Min}}\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{x^2}\boxed{\times}\boxed{3}\boxed{-}\boxed{3}\boxed{.}\boxed{5}\boxed{\times}\boxed{\text{MR}}\boxed{+}\boxed{2}\boxed{=}$

Ví dụ 2. Nếu phải tính nhiều giá trị của một đơn thức một biến có hệ số bằng số thì có thể lưu lại phép nhân với hệ số này để dùng trong các trường hợp tiếp theo. Chẳng hạn, tính các giá trị của biểu thức $S = \pi R^2$, với R = 0,61 ; R = 1,53 ; R = 2,49. Hệ số của đơn thức là số π. Ta làm như sau :

[SHIFT] [π] [×] [×] [0] [.] [6] [1] [SHIFT] [x^2] [ ]

Kết quả S = 1,168986626.

Nhờ có hai dấu "[×] [×]" trong lần đầu mà máy đã lưu lại thừa số π và dấu ×. Vì thế, trong hai lần tính sau, chỉ cần lần lượt nhập tiếp các thừa số còn lại. Cụ thể :

[1] [.] [5] [3] [SHIFT] [x^2] [−] Kết quả S − 7,354154243.

[2] [.] [4] [9] [SHIFT] [x^2] [−] Kết quả S − 19,47818861.

§2. Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

Parabol một đường cong tuyệt đẹp



Ta đã biết, trên mặt phẳng toạ độ, đồ thị của hàm số y − f(x) là tập hợp các điểm M(x ; f(x)). Để xác định một điểm của đồ thị, ta lấy một giá trị của x làm hoành độ còn tung độ là giá trị tương ứng của y − f(x).

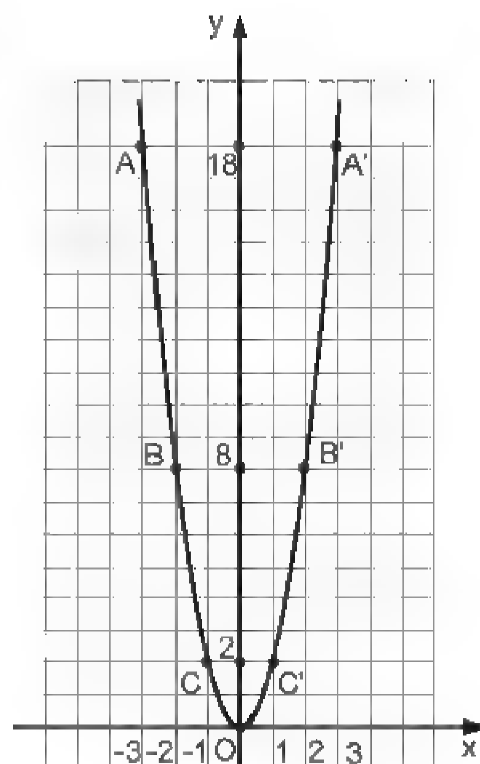
Ví dụ 1. Đồ thị của hàm số $y = 2x^2$.

Ở §1, ta có bảng ghi một số cặp giá trị tương ứng của x và y :

x	3	2	1	0	1	2	3
$y - 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

Trên mặt phẳng toạ độ, lấy các điểm : A(−3 ; 18), B(−2 ; 8), C(−1 ; 2), O(0 ; 0), C'(1 ; 2), B'(2 ; 8), A'(3 ; 18).

Đồ thị của hàm số $y = 2x^2$ đi qua các điểm đó và có dạng như hình 6.



Hình 6

?1 *Hãy nhận xét một vài đặc điểm của đồ thị này bằng cách trả lời các câu hỏi sau* (h. 6) :

Đồ thị nằm ở phía trên hay phía dưới trục hoành ?

– *Vị trí của cặp điểm* A, A' *đối với trục* Oy *? Tương tự đối với các cặp điểm* B, B' *và* C, C' *?*

Điểm nào là điểm thấp nhất của đồ thị ?

Ví dụ 2. Vẽ đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$.

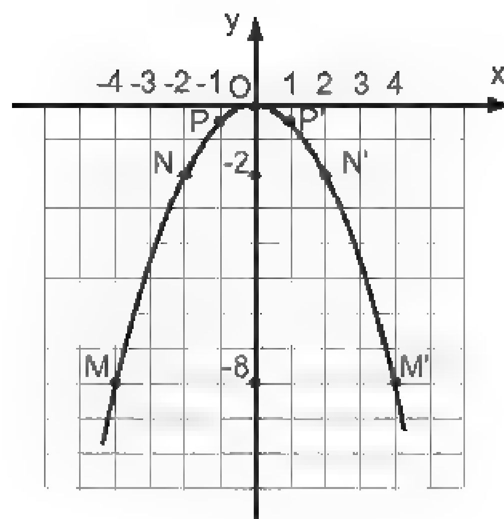
Bảng sau cho một số giá trị tương ứng của x và y :

x	−4	−2	−1	0	1	2	4
$y = -\frac{1}{2}x^2$	−8	−2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	−2	−8

Trên mặt phẳng toạ độ lấy các điểm :

M(−4 ; −8), N(−2 ; −2), $P\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$, O(0 ; 0), $P'\left(1; -\frac{1}{2}\right)$, N'(2 ; −2), M'(4 ; −8), rồi lần lượt nối chúng để được một đường cong như hình 7.

Nếu lấy được càng nhiều điểm như thế thì càng dễ vẽ chính xác đồ thị.



Hình 7

?2 *Nhận xét một vài đặc điểm của đồ thị và rút ra những kết luận, tương tự như đã làm đối với hàm số* $y = 2x^2$.

Tổng quát, ta có nhận xét sau đây.

Nhận xét

> *Đồ thị của hàm số* $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ *là một đường cong đi qua gốc toạ độ và nhận trục* Oy *làm trục đối xứng. Đường cong đó được gọi là một parabol với đỉnh* O.
>
> *Nếu* $a > 0$ *thì đồ thị nằm phía trên trục hoành,* O *là điểm thấp nhất của đồ thị.*
>
> *Nếu* $a < 0$ *thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành,* O *là điểm cao nhất của đồ thị.*

?3 *Cho hàm số* $y = -\frac{1}{2}x^2$.

a) Trên đồ thị của hàm số này, xác định điểm D *có hoành độ bằng* 3. *Tìm tung độ của điểm* D *bằng hai cách : bằng đồ thị ; bằng cách tính* y *với* $x = 3$. *So sánh hai kết quả.*

b) Trên đồ thị của hàm số này, xác định điểm có tung độ bằng −5. Có mấy điểm như thế ? Không làm tính, hãy ước lượng giá trị hoành độ của mỗi điểm.

➤ ***Chú ý***

1) Vì đồ thị $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ luôn đi qua gốc toạ độ và nhận trục Oy làm trục đối xứng nên khi vẽ đồ thị của hàm số này, ta chỉ cần tìm một số điểm ở bên phải trục Oy rồi lấy các điểm đối xứng với chúng qua Oy.

Chẳng hạn, chỉ cần tính giá trị của y ứng với $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, rồi nhờ đẳng thức $ax^2 = a(-x)^2$, ta suy ra ngay các giá trị của y ứng với các giá trị $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$. Ví dụ, đối với hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$, ta lập bảng giá trị ứng với $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$; $x = 3$, rồi điền vào những ô trống những giá trị được chỉ rõ bởi các mũi tên :

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{3}x^2$				0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3

2) Đồ thị minh hoạ một cách trực quan tính chất của hàm số. Chẳng hạn :

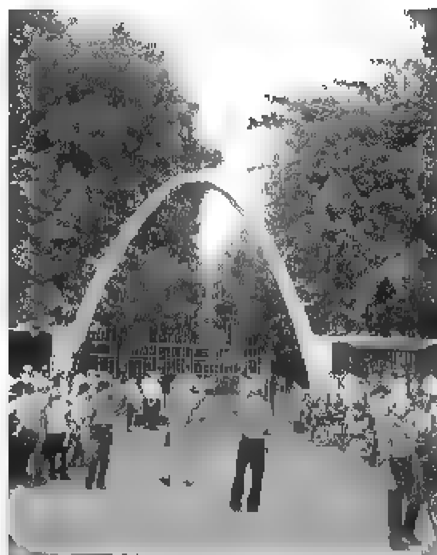
- Đồ thị của hàm số $y = 2x^2$ cho thấy : Khi x âm và tăng thì đồ thị đi xuống (từ trái sang phải), chứng tỏ hàm số nghịch biến. Khi x dương và tăng thì đồ thị đi lên (từ trái sang phải), chứng tỏ hàm số đồng biến.

Đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ cho thấy : Khi x âm và tang thì đồ thị đi lên, chứng tỏ hàm số đồng biến. Khi x dương và tăng thì đồ thị đi xuống, chứng tỏ hàm số nghịch biến



Có thể em chưa biết ?

Trong thực tế, ta thường gặp nhiều hiện tượng, vật thể có hình dạng parabol. Tia nước từ vòi phun lên cao rồi rơi xuống, trái bóng bay từ chân cầu thủ bóng đá (hoặc từ vợt của cầu thủ ten-nít) đến khi rơi xuống mặt đất, vạch ra những đường cong có hình dạng parabol Khi ta ném một hòn đá, đường đi của hòn đá cũng có hình dạng parabol.Trường Đại học Bách khoa Hà Nội có một cổng nhìn ra đường Giải Phóng, nó có hình dạng parabol và người ta thường gọi là "Cổng parabol".



Cổng trường Đại học Bách khoa Hà Nội

Bài tập

4. Cho hai hàm số : $y = \frac{3}{2}x^2$, $y = -\frac{3}{2}x^2$. Điền vào những ô trống của các bảng sau rồi vẽ hai đồ thị trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

x	−2	−1	0	1	2
$y = \frac{3}{2}x^2$					

x	−2	−1	0	1	2
$y = -\frac{3}{2}x^2$					

Nhận xét về tính đối xứng của hai đồ thị đối với trục Ox.

5. Cho ba hàm số :

$$y = \frac{1}{2}x^2 \ ; \ y = x^2 \ ; \ y = 2x^2.$$

a) Vẽ đồ thị của ba hàm số này trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Tìm ba điểm A, B, C có cùng hoành độ $x = -1,5$ theo thứ tự nằm trên ba đồ thị. Xác định tung độ tương ứng của chúng.

c) Tìm ba điểm A', B', C' có cùng hoành độ $x = 1,5$ theo thứ tự nằm trên ba đồ thị. Kiểm tra tính đối xứng của A và A', B và B', C và C'.

d) Với mỗi hàm số trên, hãy tìm giá trị của x để hàm số đó có giá trị nhỏ nhất.

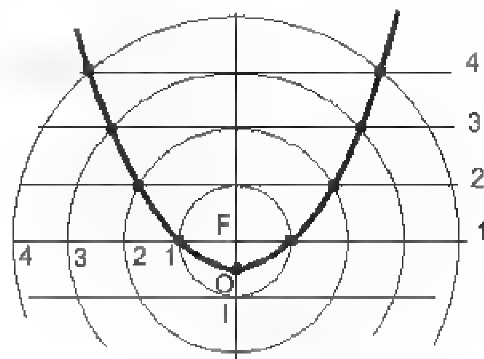


Bài đọc thêm

VÀI CÁCH VẼ PARABOL

1) *Vẽ parabol* $y = \frac{1}{2}x^2$.

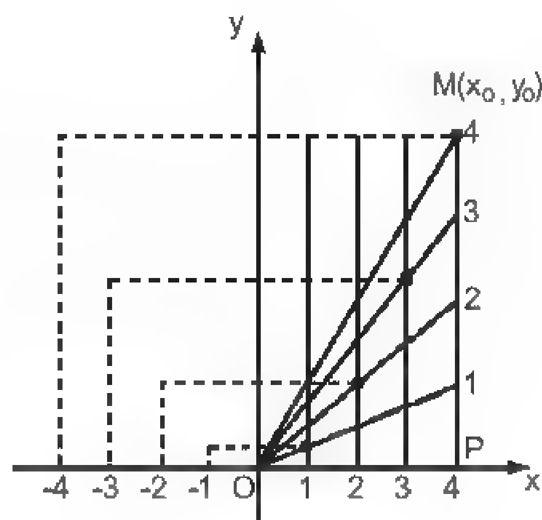
Trên trang vở có kẻ dòng, chọn khoảng cách giữa hai dòng làm đơn vị độ dài, vẽ những đường tròn cùng tâm F sao cho bán kính của chúng lần lượt bằng 1, 2, 3,... . Đánh số thứ tự các đường tròn và các dòng như hình 8. Lấy bút chì đánh dấu các giao điểm của dòng thứ nhất với đường tròn có bán kính bằng 1 ; giao điểm của dòng thứ hai với đường tròn có bán kính bằng 2 ; ... . Nối các giao điểm này và trung điểm O của đoạn FI, ta được một parabol.



Hình 8

2) *Vẽ parabol* $y = ax^2$ $(a \neq 0)$, *biết một điểm khác điểm* O *của nó*.

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, giả sử đã biết điểm $M(x_0 \ ; y_0)$ khác điểm O thuộc parabol $y = ax^2$. Gọi P là hình chiếu của M lên Ox. Lần lượt chia các đoạn OP, PM thành n phần bằng nhau (trong hình 9, n = 4). Qua các điểm



Hình 9

chia đoạn OP, kẻ những đường thẳng song song với Oy. Nối O với các điểm chia trên PM. Đánh số thứ tự các đường thẳng và các đoạn thẳng như trong hình 9. Lấy giao điểm của các cặp gồm một đường thẳng và một đoạn thẳng cùng thứ tự. Nối các giao điểm này, ta được một phần của parabol. Lấy thêm hình đối xứng của phần này qua trục Oy, ta được parabol $y = ax^2$.

Luyện tập

6. Cho hàm số $y = f(x) = x^2$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số đó.

b) Tính các giá trị $f(-8)$; $f(-1,3)$; $f(-0,75)$; $f(1,5)$

c) Dùng đồ thị để ước lượng các giá trị $(0,5)^2$; $(-1,5)^2$; $(2,5)^2$.

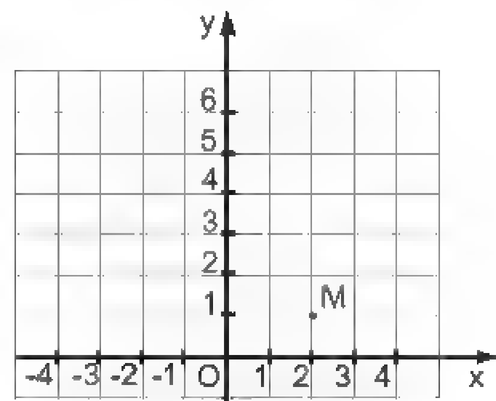
d) Dùng đồ thị để ước lượng vị trí các điểm trên trục hoành biểu diễn các số $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$.

7. Trên mặt phẳng toạ độ (h.10), có một điểm M thuộc đồ thị của hàm số $y = ax^2$.

a) Tìm hệ số a

b) Điểm A(4 ; 4) có thuộc đồ thị không ?

c) Hãy tìm thêm hai điểm nữa (không kể điểm O) để vẽ đồ thị.



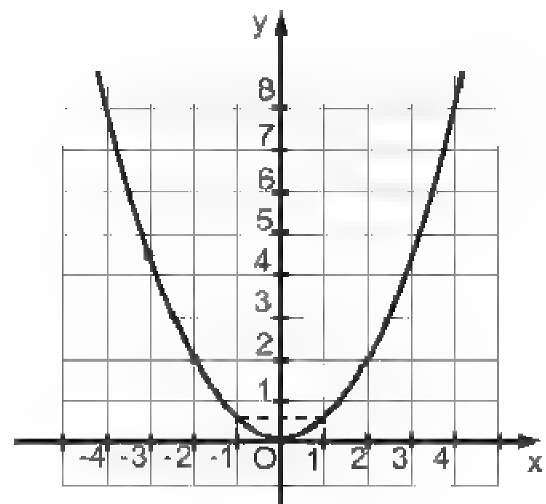
Hình 10

8. Biết rằng đường cong trong hình 11 là một parabol $y = ax^2$.

a) Tìm hệ số a

b) Tìm tung độ của điểm thuộc parabol có hoành độ $x = -3$.

c) Tìm các điểm thuộc parabol có tung độ $y = 8$.



Hình 11

9. Cho hai hàm số $y = \frac{1}{3}x^2$ và $y = -x + 6$.

a) Vẽ đồ thị của các hàm số này trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

b) Tìm toạ độ các giao điểm của hai đồ thị đó.

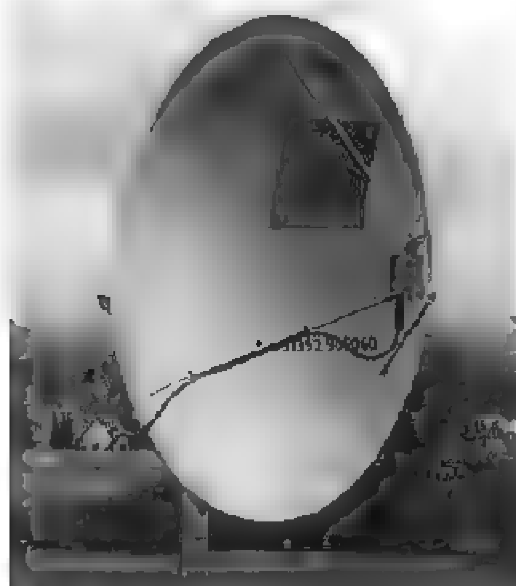
10. Cho hàm số $y = -0{,}75x^2$. Qua đồ thị của hàm số đó, hãy cho biết khi x tăng từ -2 đến 4 thì giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của y là bao nhiêu ?



Có thể em chưa biết ?

Các em đã nhìn thấy những anten parabol ; những pha đèn ôtô, xe máy, đèn pin,.... Nếu đặt bóng đèn tại một điểm thích hợp trong pha thì các tia sáng đập vào pha đèn rồi phản xạ thành những tia song song hướng ra phía trước. Do đó, ánh sáng tập trung chiếu về phía trước pha làm cho đèn sáng hơn. Trong chiến tranh thế giới lần thứ hai, người ta đã dùng đèn pha để chiếu sáng giúp lực lượng phòng không bắn máy bay địch bay trong đêm.

Tương tự, những anten parabol giúp cho việc thu, phát các tín hiệu có hiệu quả hơn.



Anten parabol

§3. Phương trình bậc hai một ẩn

1. Bài toán mở đầu

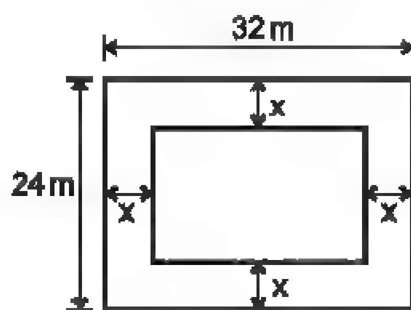
Trên một thửa đất hình chữ nhật có chiều dài là 32 m, chiều rộng là 24 m, người ta định làm một vườn cây cảnh có con đường đi xung quanh (xem hình 12). Hỏi bề rộng của mặt đường là bao nhiêu để diện tích phần đất còn lại bằng 560 m^2.

Để giải bài toán này, ta gọi bề rộng mặt đường là x(m), $0 < 2x < 24$. Phần đất còn lại là hình chữ nhật có :

Chiều dài là $32 - 2x$ (m) ;

Chiều rộng là $24 - 2x$ (m) ,

Diện tích là $(32 - 2x)(24 - 2x)$ (m^2).



Hình 12

Theo đầu bài ta có phương trình

$$(32 - 2x)(24 - 2x) = 560$$

hay $$x^2 - 28x + 52 = 0$$

Phương trình $x^2 - 28x + 52 = 0$ được gọi là một *phương trình bậc hai một ẩn*.

2. Định nghĩa

Phương trình bậc hai một ẩn (nói gọn là phương trình bậc hai) là phương trình có dạng

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

trong đó x là ẩn ; a, b, c *là những số cho trước gọi là các hệ số và* $a \neq 0$.

Ví dụ

a) $x^2 + 50x - 15000 = 0$ là một phương trình bậc hai với các hệ số $a = 1$, $b = 50$, $c = -15000$.

b) $-2x^2 + 5x = 0$ là một phương trình bậc hai với các hệ số $a = -2$, $b = 5$, $c = 0$.

c) $2x^2 - 8 = 0$ cũng là một phương trình bậc hai với các hệ số $a = 2$, $b = 0$, $c = -8$.

?1 *Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc hai ? Chỉ rõ các hệ số* a, b, c *của mỗi phương trình ấy :*

a) $x^2 \quad 4 - 0$; b) $x^3 + 4x^2 \quad 2 - 0$; c) $2x^2 + 5x - 0$;

d) $4x - 5 = 0$; e) $-3x^2 = 0$.

3. Một số ví dụ về giải phương trình bậc hai

Ví dụ 1. Giải phương trình $3x^2 - 6x = 0$.

Giải. Ta có $3x^2 - 6x - 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) - 0 \Leftrightarrow x - 0$ hoặc $x - 2 - 0$

$\Leftrightarrow x - 0$ hoặc $x - 2$

Vậy phương trình có hai nghiệm : $x_1 = 0, x_2 = 2$.

?2 *Giải phương trình $2x^2 + 5x = 0$ bằng cách đặt nhân tử chung để đưa nó về phương trình tích.*

Ví dụ 2. Giải phương trình $x^2 - 3 - 0$.

Giải. Chuyển vế -3 và đổi dấu của nó, ta được :

$$x^2 = 3,$$

tức là $x = \pm\sqrt{3}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm :

$$x_1 - \sqrt{3}, x_2 - -\sqrt{3}.$$

?3 *Giải phương trình* $3x^2 - 2 = 0$.

?4 *Giải phương trình $(x - 2)^2 - \frac{7}{2}$ bằng cách điền vào các chỗ trống (...) trong các đẳng thức :*

$(x \quad 2)^2 - \frac{7}{2} \Leftrightarrow x \quad 2 - \ldots \Leftrightarrow x - \ldots$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là : $x_1 - \ldots, x_2 - \ldots$.

?5 *Giải phương trình* $x^2 - 4x + 4 - \frac{7}{2}$

?6 *Giải phương trình* $x^2 - 4x = -\frac{1}{2}$.

?7 *Giải phương trình* $2x^2 - 8x = \quad 1$.

Dựa vào cách giải các phương trình trong ?5, ?6, ?7, ta có thể thực hiện đầy đủ phép giải phương trình trong ví dụ 3 dưới đây.

Ví dụ 3. Giải phương trình $2x^2 - 8x + 1 = 0$.

Ta có thể giải như sau :

– Chuyển 1 sang vế phải : $2x^2 - 8x = -1$.

– Chia hai vế cho 2, ta được $x^2 - 4x = -\frac{1}{2}$.

– Tách 4x ở vế trái thành 2 x 2 và thêm vào hai vế cùng một số để vế trái thành một bình phương

$$x^2 - 2.x.2 + \boxed{\,.\,} = -\frac{1}{2} + \boxed{\,.\,}$$

$$2^2 = 4$$

Ta được phương trình $x^2 - 2.x.2 + 4 = 4 - \frac{1}{2}$ hay $(x - 2)^2 = \frac{7}{2}$.

Suy ra $x - 2 = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$ hay $x - 2 = \pm\frac{\sqrt{14}}{2}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm : $x_1 = \frac{4 + \sqrt{14}}{2}$, $x_2 = \frac{4 - \sqrt{14}}{2}$.

Bài tập

11. Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + bx + c = 0$ và chỉ rõ các hệ số a, b, c :

a) $5x^2 + 2x = 4 - x$;

b) $\frac{3}{5}x^2 + 2x - 7 = 3x + \frac{1}{2}$;

c) $2x^2 + x - \sqrt{3} = \sqrt{3}x + 1$;

d) $2x^2 + m^2 = 2(m - 1)x$, m là một hằng số.

12. Giải các phương trình sau :

a) $x^2 - 8 = 0$;

b) $5x^2 - 20 = 0$;

c) $0,4x^2 + 1 = 0$;

d) $2x^2 + \sqrt{2}x = 0$;

e) $-0,4x^2 + 1,2x = 0$.

13. Cho các phương trình :

a) $x^2 + 8x = \quad 2$; b) $x^2 + 2x = \frac{1}{3}$.

Hãy cộng vào hai vế của mỗi phương trình cùng một số thích hợp để được một phương trình mà vế trái thành một bình phương.

14. Hãy giải phương trình

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

theo các bước như ví dụ 3 trong bài học.

§4. Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Trong mục này, ta sẽ xét xem khi nào phương trình bậc hai có nghiệm và tìm công thức nghiệm khi phương trình có nghiệm.

1. Công thức nghiệm

Biến đổi phương trình tổng quát

$$ax^2 + bx + c - 0 \ (a \neq 0) \qquad (1)$$

theo các bước như khi giải phương trình $2x^2 \quad 8x + 1 - 0$ ở ví dụ 3 (§3).

– Chuyển hạng tử tự do sang vế phải : $ax^2 + bx - -c$.

– Vì $a \neq 0$, chia hai vế cho hệ số a, ta có $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$.

Tách hạng tử $\frac{b}{a}x$ thành $2.x.\frac{b}{2a}$ và thêm vào hai vế cùng một biểu thức để vế trái thành bình phương của một biểu thức :

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \boxed{.} = -\frac{c}{a} + \boxed{.},$$

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

ta được $$x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad \frac{c}{a}$$

hay $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \qquad (2)$$

Người ta kí hiệu $$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

và gọi nó là *biệt thức* của phương trình (Δ là một chữ cái Hi Lạp, đọc là "đenta").

Bây giờ dùng phương trình (2), ta xét mọi trường hợp có thể xảy ra đối với Δ để suy ra khi nào thì phương trình có nghiệm và viết nghiệm nếu có.

?1 *Hãy điền những biểu thức thích hợp vào các chỗ trống (...) dưới đây :*

a) Nếu $\Delta > 0$ *thì từ phương trình* (2) *suy ra* $x + \frac{b}{2a} = \pm$

Do đó, phương trình (1) *có hai nghiệm :* $x_1 = \ldots, \quad x_2 = \ldots$

b) Nếu $\Delta = 0$ *thì từ phương trình* (2) *suy ra* $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \ldots$

Do đó, phương trình (1) *có nghiệm kép* $x = \ldots$

?2 *Hãy giải thích vì sao khi* $\Delta < 0$ *thì phương trình vô nghiệm.*

Tóm lại, ta có kết luận chung sau đây.

> *Đối với phương trình* $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ *và biệt thức* $\Delta = b^2 - 4ac$:
>
> - *Nếu* $\Delta > 0$ *thì phương trình có hai nghiệm phân biệt :*
>
> $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a};$$
>
> - *Nếu* $\Delta = 0$ *thì phương trình có nghiệm kép* $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;
> - *Nếu* $\Delta < 0$ *thì phương trình vô nghiệm.*

2. Áp dụng

Ví dụ. Giải phương trình $3x^2 + 5x - 1 = 0$.

Giải

• *Tính* $\Delta = b^2 - 4ac$.

Phương trình có các hệ số là $a = 3$, $b = 5$, $c = -1$.

$$\Delta = 5^2 - 4 \,.\, 3 \,.\, (-1) = 25 + 12 = 37.$$

• Do $\Delta > 0$, áp dụng công thức nghiệm, phương trình có hai nghiệm phân biệt :

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{37}}{6}, \qquad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{37}}{6}.$$

?3 *Áp dụng công thức nghiệm để giải các phương trình :*

a) $5x^2 - x + 2 = 0$; *b)* $4x^2 - 4x + 1 = 0$;

c) $-3x^2 + x + 5 = 0$.

➤ ***Chú ý.*** Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có a và c trái dấu, tức là $ac < 0$ thì $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Khi đó, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài tập

15. Không giải phương trình, hãy xác định các hệ số a, b, c, tính biệt thức Δ và xác định số nghiệm của mỗi phương trình sau :

a) $7x^2 - 2x + 3 = 0$; b) $5x^2 + 2\sqrt{10}\,x + 2 = 0$;

c) $\frac{1}{2}x^2 + 7x + \frac{2}{3} = 0$; d) $1{,}7x^2 - 1{,}2x - 2{,}1 = 0$.

16. Dùng công thức nghiệm của phương trình bậc hai để giải các phương trình sau :

a) $2x^2 - 7x + 3 = 0$; b) $6x^2 + x + 5 = 0$;

c) $6x^2 + x - 5 = 0$; d) $3x^2 + 5x + 2 = 0$;

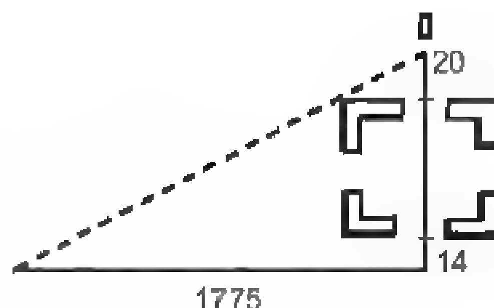
e) $y^2 - 8y + 16 = 0$; f) $16z^2 + 24z + 9 = 0$.



Có thể em chưa biết ?

Vào thiên niên kỉ thứ hai trước Công nguyên, người Ba-bi-lon đã biết cách giải phương trình bậc hai. Các nhà toán học cổ Hi Lạp đã giải phương trình này bằng hình học. Nhiều bài toán dẫn tới phương trình bậc hai được nói đến trong một số tài liệu toán học thời cổ. Ví dụ, trong một tài liệu Toán của Trung Quốc, vào khoảng thế kỉ thứ hai trước Công nguyên, có một bài toán như sau :

"Một thành luỹ xây trên một khoảnh đất hình vuông mà không biết độ dài của cạnh (h. 13). Ở chính giữa mỗi cạnh có một cổng. Ở ngoài thành phố, từ cổng phía bắc nhìn thẳng ra chừng 20 bộ (1 bộ ≈ 1,6 m) có một cột bằng đá. Nếu đi thẳng từ cổng phía nam ra ngoài 14 bộ rồi rẽ sang phía tây đi tiếp 1775 bộ thì có thể nhìn thấy cột. Hỏi độ dài mỗi cạnh của khoảnh đất là bao nhiêu ?"



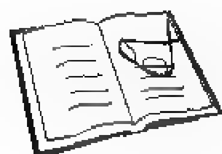
Hình 13

$\left(\frac{5}{2}\right)^2$	$\frac{5}{2}x$	$\left(\frac{5}{2}\right)^2$
$\frac{5}{2}x$	x^2	$\frac{5}{2}x$
$\left(\frac{5}{2}\right)^2$	$\frac{5}{2}x$	$\left(\frac{5}{2}\right)^2$

Hình 14

Sử dụng các tam giác đồng dạng, bài toán sẽ dẫn tới một phương trình bậc hai.

Công thức nghiệm của phương trình bậc hai lần đầu tiên được nhà toán học Ấn Độ Bra-ma-gup-ta thiết lập. Sau đó, vào thế kỉ IX, nhà bác học An Khô-va-ri-zmi (Al – Khôwarizmi) ở thành Bát đa (Baghdad – Thủ đô nước I rắc ngày nay) cũng tìm được công thức này bằng phương pháp tách ra một bình phương nhờ một minh hoạ hình học. Chẳng hạn để giải phương trình $x^2 + 10x = 39$, ông đã biến vế trái thành một bình phương như minh hoạ trên hình 14. Hình vẽ này cho thấy, nếu cộng $4\left(\frac{5}{2}\right)^2$ vào hai vế của phương trình thì vế trái bằng $\left(x + 2 \cdot \frac{5}{2}\right)^2$ hay $(x + 5)^2$ và là diện tích của hình vuông có cạnh bằng x + 5, còn vế phải bằng 39 + 25 = 64. Tính cạnh là x + 5, ta sẽ tìm được x.



Bài đọc thêm

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI BẰNG MÁY TÍNH BỎ TÚI CASIO *fx-220*

• Tính $\Delta \quad b^2 - 4ac$. Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

• Nếu $\Delta > 0$, ta tìm nghiệm Vì $\sqrt{\Delta}$ được dùng hai lần nên ta dùng phím nhớ [Min] lưu nó lại trong máy rồi tìm các nghiệm.

Ví du. Giải phương trình $3x^2 - 4x - 7 = 0$.

• Tính Δ

[4] [+ /] [SHIFT] [x^2] [ ] [4] [×] [3] [×] [7] [+/] [–]

(Máy cho kết quả là 100, vì 100 > 0 nên ta thực hiện tiếp việc tìm nghiệm).

• Tìm nghiệm

[$\sqrt{\ }$] [Min] [+] [4] [–] [:] [2] [:] [3] [–]

Kết quả $\quad x_1 \approx 2{,}333333333$.

Để tính $x_2 - \dfrac{4 - \sqrt{\Delta}}{2\ 3}$, ta dùng phím [MR] để gọi $\sqrt{\Delta}$. Cụ thể :

[4] [–] [MR] [–] [÷] [6] [–]

Kết quả $x_2 = -1$.

§5. Công thức nghiệm thu gọn

1. Công thức nghiệm thu gọn

Đối với phương trình $ax^2 + bx + c - 0 \ (a \neq 0)$, trong nhiều trường hợp nếu đặt $b - 2b'$ thì việc tính toán để giải phương trình sẽ đơn giản hơn.

Trước hết, nếu đặt

$$b - 2b'$$

thì

$$\Delta = (2b')^2 - 4ac = 4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac)$$

Kí hiệu

$$\boxed{\Delta' = b'^2 - ac,}$$

ta có

$$\Delta = 4\Delta'.$$

?1 *Từ bảng kết luận của bài trước hãy dùng các đẳng thức* $b = 2b'$ *và* $\Delta = 4\Delta'$ *để suy ra những kết luận sau :*

Đối với phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ *và* $b = 2b'$, $\Delta' = b'^2 - ac$:
• *Nếu* $\Delta' > 0$ *thì phương trình có hai nghiệm phân biệt* $$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; \quad x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}.$$
• *Nếu* $\Delta' = 0$ *thì phương trình có nghiệm kép* $x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$.
• *Nếu* $\Delta' < 0$ *thì phương trình vô nghiệm.*

Công thức nghiệm vừa viết trên đây được gọi là *công thức nghiệm thu gọn.*

2. Áp dụng

?2 *Giải phương trình* $5x^2 + 4x - 1 = 0$ *bằng cách điền vào những chỗ trống :*

$a = \ldots$; $b' = \ldots$; $c = \ldots$;

$\Delta' = \ldots$; $\sqrt{\Delta'} = \ldots$.

Nghiệm của phương trình :

$x_1 = \ldots$; $x_2 = \ldots$.

?3 *Xác định* a, b', c *rồi dùng công thức nghiệm thu gọn giải các phương trình :*

a) $3x^2 + 8x + 4 = 0$; *b)* $7x^2 - 6\sqrt{2}x + 2 = 0$.

Bài tập

17. Xác định a, b', c rồi dùng công thức nghiệm thu gọn giải các phương trình :

a) $4x^2 + 4x + 1 = 0$; b) $13852x^2 - 14x + 1 = 0$;

c) $5x^2 - 6x + 1 = 0$; d) $-3x^2 + 4\sqrt{6}x + 4 = 0$.

18. Đưa các phương trình sau về dạng $ax^2 + 2b'x + c = 0$ và giải chúng. Sau đó, dùng bảng số hoặc máy tính để viết gần đúng nghiệm tìm được (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai) :

a) $3x^2 - 2x = x^2 + 3$; b) $(2x - \sqrt{2})^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$;

c) $3x^2 + 3 = 2(x + 1)$; d) $0{,}5x(x + 1) = (x - 1)^2$.

19. ***Đố.*** Đố em biết vì sao khi $a > 0$ và phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm thì $ax^2 + bx + c > 0$ với mọi giá trị của x ?

Luyện tập

20. Giải các phương trình :

a) $25x^2 - 16 = 0$; b) $2x^2 + 3 = 0$;

c) $4{,}2x^2 + 5{,}46x = 0$; d) $4x^2 - 2\sqrt{3}x = 1 - \sqrt{3}$.

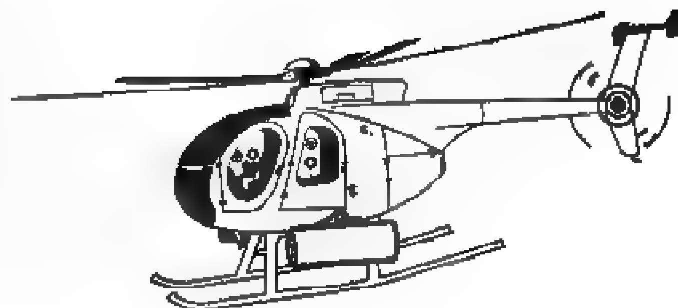
21. Giải vài phương trình của An Khô-va-ri-zmi (Xem Toán 7, Tập 2, tr.26) :

a) $x^2 = 12x + 288$; b) $\frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{12}x = 19$.

22. Không giải phương trình, hãy cho biết mỗi phương trình sau có bao nhiêu nghiệm :

a) $15x^2 + 4x - 2005 = 0$; b) $-\frac{19}{5}x^2 - \sqrt{7}x + 1890 = 0$.

23. Rađa của một máy bay trực thăng theo dõi chuyển động của một ôtô trong 10 phút, phát hiện rằng vận tốc v của ôtô thay đổi phụ thuộc vào thời gian bởi công thức :



$$v = 3t^2 - 30t + 135,$$

(t tính bằng phút, v tính bằng km/h).

a) Tính vận tốc của ôtô khi t = 5 phút



b) Tính giá trị của t khi vận tốc ôtô bằng 120 km/h (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

24. Cho phương trình (ẩn x) $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 = 0$

a) Tính Δ'.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt ? Có nghiệm kép ? Vô nghiệm ?

§6. Hệ thức Vi-ét và ứng dụng

Nghiệm và hệ số của phương trình có mối liên quan kì diệu

1. Hệ thức Vi-ét

Trước hết chú ý rằng, nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thì dù đó là hai nghiệm phân biệt hay nghiệm kép, ta đều có thể viết các nghiệm đó dưới dạng :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

?1 *Hãy tính* $x_1 + x_2$, x_1x_2.

Như vậy, ta đã thấy được một mối liên hệ giữa các nghiệm với các hệ số của phương trình bậc hai mà Vi-ét, nhà toán học người Pháp đã phát hiện vào đầu thế kỉ thứ XVII và ngày nay nó được phát biểu thành một định lí mang tên ông

ĐỊNH LÍ VI ÉT

> *Nếu* x_1, x_2 *là hai nghiệm của phương trình* $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ *thì*
>
> $$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Áp dụng. Nhờ định lí Vi ét, nếu đã biết một nghiệm của phương trình bậc hai thì có thể suy ra nghiệm kia. Ta xét riêng hai trường hợp đặc biệt sau :

?2 *Cho phương trình* $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

a) Xác định các hệ số a, b, c *rồi tính* $a + b + c$.

b) Chứng tỏ rằng $x_1 = 1$ *là một nghiệm của phương trình.*

c) Dùng định lí Vi-ét để tìm x_2.

Tổng quát

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ *có* $a + b + c = 0$ *thì phương trình có một nghiệm là* $x_1 = 1$, *còn nghiệm kia là* $x_2 = \dfrac{c}{a}$.

?3 *Cho phương trình* $3x^2 + 7x + 4 = 0$.

a) Chỉ rõ các hệ số a, b, c *của phương trình và tính* $a - b + c$.

b) Chứng tỏ $x_1 = -1$ *là một nghiệm của phương trình.*

c) Tìm nghiệm x_2.

Tổng quát

Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ *có* $a - b + c = 0$ *thì phương trình có một nghiệm là* $x_1 = -1$, *còn nghiệm kia là* $x_2 = -\dfrac{c}{a}$.

?4 *Tính nhẩm nghiệm của các phương trình :*

a) $-5x^2 + 3x + 2 = 0$; b) $2004x^2 + 2005x + 1 = 0$.

2. Tìm hai số biết tổng và tích của chúng

Giả sử hai số cần tìm có tổng bằng S và tích bang P. Gọi một số là x thì số kia là S – x. Theo giả thiết ta có phương trình

$$x(S - x) = P \text{ hay } x^2 - Sx + P = 0. \quad (1)$$

Nếu $\Delta = S^2 - 4P \geq 0$ thì phương trình (1) có nghiệm. Các nghiệm này chính là hai số cần tìm.

Vậy :

Nếu hai số có ***tổng*** *bằng S và* ***tích*** *bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình*

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Điều kiện để có hai số đó là $S^2 - 4P \geq 0$.

Áp dụng :

Ví dụ 1. Tìm hai số, biết tổng của chúng bằng 27, tích của chúng bằng 180.

Giải. Hai số cần tìm là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 27x + 180 = 0$.

Ta có : $\Delta = 27^2 - 4.1.180 = 729 - 720 = 9$; $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$;

$$x_1 = \frac{27 + 3}{2} = 15, \qquad x_2 = \frac{27 - 3}{2} = 12.$$

Vậy hai số cần tìm là 15 và 12.

?5 *Tìm hai số biết tổng của chúng bằng* 1, *tích của chúng bằng* 5.

Ví dụ 2. Tính nhẩm nghiệm của phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$

Giải. Vì $2 + 3 = 5$; $2.3 = 6$ nên $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ là hai nghiệm của phương trình đã cho.

Bài tập

25. Đối với mỗi phương trình sau, kí hiệu x_1 và x_2 là hai nghiệm (nếu có). Không giải phương trình, hãy điền vào những chỗ trống (...) :

a) $2x^2 - 17x + 1 = 0$, $\Delta = ...$, $x_1 + x_2 = ...$, $x_1x_2 = ...$;

b) $5x^2 - x - 35 = 0$, $\Delta = ...$, $x_1 + x_2 = ...$, $x_1x_2 = ...$;

c) $8x^2 - x + 1 = 0$, $\Delta = \dots$, $x_1 + x_2 = \dots$, $x_1x_2 = \dots$;

d) $25x^2 + 10x + 1 = 0$, $\Delta = \dots$, $x_1 + x_2 = \dots$, $x_1x_2 = \dots$.

26. Dùng điều kiện $a + b + c = 0$ hoặc $a - b + c = 0$ để tính nhẩm nghiệm của mỗi phương trình sau :

a) $35x^2 - 37x + 2 = 0$; b) $7x^2 + 500x - 507 = 0$;

c) $x^2 - 49x - 50 = 0$; d) $4321x^2 + 21x - 4300 = 0$.

27. Dùng hệ thức Vi-ét để tính nhẩm các nghiệm của phương trình.

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$; b) $x^2 + 7x + 12 = 0$.

28. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau :

a) $u + v = 32$, $uv = 231$; b) $u + v = -8$, $uv = -105$;

c) $u + v = 2$, $uv = 9$.



Có thể em chưa biết ?

Phrăng-xoa Vi-ét (F. Viète) sinh năm 1540 tại Pháp. Ông là một nhà toán học nổi tiếng. Chính ông là người đầu tiên dùng chữ để kí hiệu các ẩn và cả các hệ số của phương trình, đồng thời dùng chúng trong việc biến đổi và giải phương trình. Nhờ cách dùng chữ để kí hiệu mà Đại số đã phát triển mạnh mẽ.



F. Viète

Ông đã phát hiện mối liên hệ giữa các nghiệm và các hệ số của phương trình mà ta vừa học. Ông còn nổi tiếng trong việc giải mật mã. Trong cuộc chiến tranh giữa Pháp và Tây Ban Nha hồi cuối thế kỉ XVI, vua Hen-ri IV đã mời ông giải những bản mật mã lấy được của quân Tây Ban Nha. Nhờ đó mà quân Pháp đã phá được nhiều âm mưu của đối phương. Vua Tây Ban Nha Phi-lip II đã tuyên án thiêu sống ông trên dàn lửa. Tuy nhiên, họ không bắt được ông.

Ngoài việc làm toán, Vi-ét còn là một luật sư và một chính trị gia nổi tiếng. Ông mất năm 1603.

Luyện tập

29. Không giải phương trình, hãy tính tổng và tích các nghiệm (nếu có) của mỗi phương trình sau :

a) $4x^2 + 2x - 5 = 0$; b) $9x^2 - 12x + 4 = 0$;

c) $5x^2 + x + 2 = 0$; d) $159x^2 - 2x - 1 = 0$.

30. Tìm giá trị của m để phương trình có nghiệm, rồi tính tổng và tích các nghiệm theo m.

a) $x^2 - 2x + m = 0$; b) $x^2 + 2(m - 1)x + m^2 = 0$.

31. Tính nhẩm nghiệm của các phương trình :

a) $1,5x^2 - 1,6x + 0,1 = 0$; b) $\sqrt{3}x^2 - (1 - \sqrt{3})x - 1 = 0$;

c) $\left(2 - \sqrt{3}\right)x^2 + 2\sqrt{3}x - \left(2 + \sqrt{3}\right) = 0$;

d) $(m - 1)x^2 - (2m + 3)x + m + 4 = 0$ với $m \neq 1$.

32. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau :

a) $u + v = 42$, $uv = 441$; b) $u + v = -42$, $uv = -400$;

c) $u - v = 5$, $uv = 24$.

33. Chứng tỏ rằng nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm là x_1 và x_2 thì tam thức $ax^2 + bx + c$ phân tích được thành nhân tử như sau :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Áp dụng. Phân tích đa thức thành nhân tử.

a) $2x^2 - 5x + 3$; b) $3x^2 + 8x + 2$.

§7. Phương trình quy về phương trình bậc hai

1. Phương trình trùng phương

Phương trình *trùng phương* là phương trình có dạng

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \ (a \neq 0).$$

Nhận xét. Phương trình trên không phải là phương trình bậc hai, song có thể đưa nó về phương trình bậc hai bằng cách *đặt ẩn phụ*. Chẳng hạn, nếu đặt $x^2 = t$ thì ta được phương trình bậc hai $at^2 + bt + c = 0$.

Ví dụ 1. Giải phương trình : $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. (1)

Giải

Đặt x^2 – t Điều kiện là $t \geq 0$. Ta được một phương trình bậc hai đối với ẩn t

$$t^2 - 13t + 36 = 0. \quad (2)$$

– Giải phương trình (2) : $\Delta \quad 169 - 144 \quad 25, \sqrt{\Delta} \quad 5, t_1 \quad \frac{13 \quad 5}{2} \quad 4$ và $t_2 - \frac{13 + 5}{2} - 9$. Cả hai giá trị 4 và 9 đều thoả mãn điều kiện $t \geq 0$.

• Với $t \quad t_1 \quad 4$, ta có $x^2 \quad 4$. Suy ra $x_1 - -2, x_2 \quad 2$.

• Với $t = t_2 = 9$, ta có $x^2 = 9$. Suy ra $x_3 = \quad 3, x_4 = 3$.

Vậy phương trình (1) có bốn nghiệm : $x_1 - \quad 2, x_2 \quad 2, x_3 - \quad 3, x_4 \quad 3$.

?1 *Giải các phương trình trùng phương :*

a) $4x^4 + x^2 - 5 = 0$; b) $3x^4 + 4x^2 + 1 = 0$.

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Ở lớp 8 ta đã biết, khi giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta làm như sau :

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình ;

Bước 2. Quy đồng mẫu thức hai vế rồi khử mẫu thức ;

Bước 3. Giải phương trình vừa nhận được ;

Bước 4. Trong các giá trị tìm được của ẩn, loại các giá trị không thoả mãn điều kiện xác định, các giá trị thoả mãn điều kiện xác định là nghiệm của phương trình đã cho.

?2 *Giải phương trình* $\frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 - 9} = \frac{1}{x \quad 3}$ (3)

bằng cách điền vào các chỗ trống (.) và trả lời các câu hỏi.

Điều kiện : $x \neq \ldots$.

Khử mẫu và biến đổi, ta được : $x^2 \quad 3x + 6 \quad \ldots \Leftrightarrow x^2 \quad 4x + 3 \quad 0$.

– *Nghiệm của phương trình* $x^2 - 4x + 3 = 0$ *là :* $x_1 = ...$ *;* $x_2 = ...$ *.*
Hỏi x_1 *có thoả mãn điều kiện nói trên không ? Tương tự, đối với* x_2 *?*
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là : ... .

3. Phương trình tích

Ví dụ 2. Giải phương trình : $(x + 1)(x^2 + 2x - 3) = 0.$ (4)

Giải. $(x + 1)(x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ hoặc $x^2 + 2x - 3 = 0.$

Giải hai phương trình này, ta được các nghiệm của phương trình .

$$x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -3.$$

?3 *Giải phương trình sau bằng cách đưa về phương trình tích*

$$x^3 + 3x^2 + 2x = 0.$$

Bài tập

34. Giải các phương trình trùng phương :

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; b) $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$; c) $3x^4 + 10x^2 + 3 = 0$.

35. Giải các phương trình :

a) $\frac{(x+3)(x-3)}{3} + 2 = x(1-x)$; b) $\frac{x+2}{x-5} + 3 = \frac{6}{2-x}$;

c) $\frac{4}{x+1} = \frac{x^2 - x + 2}{(x+1)(x+2)}$.

36. Giải các phương trình :

a) $(3x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) = 0$; b) $(2x^2 + x - 4)^2 - (2x - 1)^2 = 0$.

Luyện tập

37. Giải phương trình trùng phương

a) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$; b) $5x^4 + 2x^2 - 16 = 10 - x^2$;

c) $0,3x^4 + 1,8x^2 + 1,5 = 0$; d) $2x^2 + 1 = \frac{1}{x^2} - 4$.

38. Giải các phương trình :

a) $(x - 3)^2 + (x + 4)^2 = 23 - 3x$;

b) $x^3 + 2x^2 - (x - 3)^2 = (x - 1)(x^2 - 2)$;

c) $(x-1)^3 + 0{,}5x^2 = x(x^2 + 1{,}5)$;

d) $\dfrac{x(x-7)}{3} - 1 = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x-4}{3}$;

e) $\dfrac{14}{x^2-9} = 1 - \dfrac{1}{3-x}$;

f) $\dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{x^2 - x + 8}{(x+1)(x-4)}$.

39. Giải phương trình bằng cách đưa về phương trình tích.

a) $(3x^2 - 7x - 10)[2x^2 + (1-\sqrt{5})x + \sqrt{5} - 3] = 0$;

b) $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$;

c) $(x^2 - 1)(0{,}6x + 1) = 0{,}6x^2 + x$;

d) $(x^2 + 2x - 5)^2 = (x^2 - x + 5)^2$.

40. Giải phương trình bằng cách đặt ẩn phụ.

a) $3(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 1 = 0$;

b) $(x^2 - 4x + 2)^2 + x^2 - 4x - 4 = 0$;

c) $x - \sqrt{x} = 5\sqrt{x} + 7$;

d) $\dfrac{x}{x+1} - 10.\dfrac{x+1}{x} = 3$.

Hướng dẫn. a) Đặt $t = x^2 + x$, ta có phương trình $3t^2 - 2t - 1 = 0$. Giải phương trình này, ta tìm được hai giá trị của t. Thay mỗi giá trị của t vừa tìm được vào đẳng thức $t = x^2 + x$, ta được một phương trình của ẩn x. Giải mỗi phương trình này sẽ tìm được giá trị của x.

d) Đặt $\dfrac{x+1}{x} = t$ hoặc $\dfrac{x}{x+1} = t$.

§8. Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Ví dụ. Một xưởng may phải may xong 3000 áo trong một thời gian quy định. Để hoàn thành sớm kế hoạch, mỗi ngày xưởng đã may được nhiều hơn 6 áo so với số áo phải may trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế 5 ngày trước khi hết thời hạn, xưởng đã may được 2650 áo. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày xưởng phải may xong bao nhiêu áo ?

Giải. Gọi số áo phải may trong 1 ngày theo kế hoạch là x ($x \in \mathbf{N}$, $x > 0$)

Thời gian quy định may xong 3000 áo là $\dfrac{3000}{x}$ (ngày).

Số áo thực tế may được trong 1 ngày là $x + 6$ (áo).

Thời gian may xong 2650 áo là $\frac{2650}{x+6}$ (ngày).

Vì xưởng may xong 2650 áo trước khi hết hạn 5 ngày nên ta có phương trình

$$\frac{3000}{x} - 5 = \frac{2650}{x+6}.$$

Giải phương trình trên :

$$3000(x + 6) - 5x(x + 6) = 2650x \text{ hay } x^2 - 64x - 3600 = 0,$$

$$\Delta' = 32^2 + 3600 = 4624, \ \sqrt{\Delta'} = 68,$$

$$x_1 = 32 + 68 = 100, \quad x_2 = 32 - 68 = -36,$$

$x_2 = -36$ không thoả mãn điều kiện của ẩn.

Trả lời. Theo kế hoạch, mỗi ngày xưởng phải may xong 100 áo.

?1 *Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều rộng bé hơn chiều dài* 4 m *và diện tích bằng* 320 m^2. *Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất.*

Bài tập

41. Trong lúc học nhóm, bạn Hùng yêu cầu bạn Minh và bạn Lan mỗi người chọn một số sao cho hai số này hơn kém nhau là 5 và tích của chúng phải bằng 150. Vậy hai bạn Minh và Lan phải chọn những số nào ?

42. Bác Thời vay 2 000 000 đồng của ngân hàng để làm kinh tế gia đình trong thời hạn một năm. Lẽ ra cuối năm bác phải trả cả vốn lẫn lãi. Song bác đã được ngân hàng cho kéo dài thời hạn thêm một năm nữa, số lãi của năm đầu được gộp vào với vốn để tính lãi năm sau và lãi suất vẫn như cũ. Hết hai năm bác phải trả tất cả là 2 420 000 đồng. Hỏi lãi suất cho vay là bao nhiêu phần trăm trong một năm ?

43. Một xuồng du lịch đi từ thành phố Cà Mau đến Đất Mũi theo một đường sông dài 120 km. Trên đường đi, xuồng có nghỉ lại 1 giờ ở thị trấn Năm Căn. Khi về, xuồng đi theo đường khác dài hơn đường lúc đi 5 km và với vận tốc nhỏ hơn vận tốc lúc đi là 5 km/h. Tính vận tốc của xuồng lúc đi, biết rằng thời gian về bằng thời gian đi.

44. ***Đố.*** Đố em tìm được một số mà một nửa của nó trừ đi một nửa đơn vị rồi nhân với một nửa của nó bằng một nửa đơn vị.

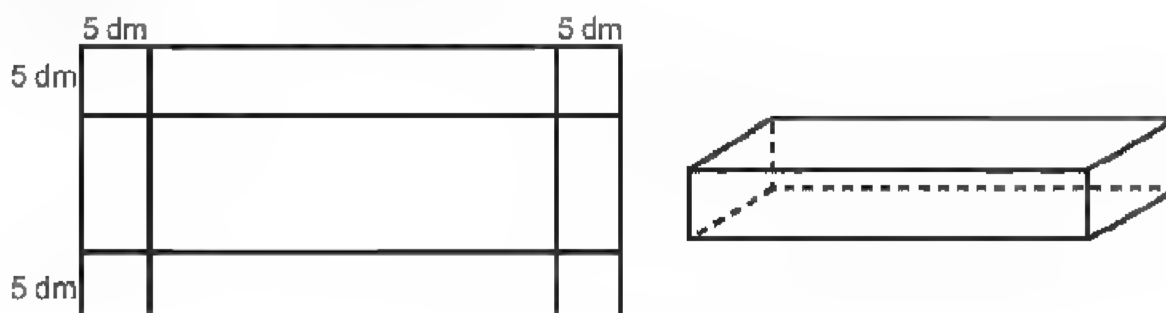
Luyện tập

45. Tích của hai số tự nhiên liên tiếp lớn hơn tổng của chúng là 109. Tìm hai số đó.

46. Một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích 240 m^2. Nếu tăng chiều rộng 3 m và giảm chiều dài 4 m thì diện tích mảnh đất không đổi. Tính kích thước của mảnh đất.

47. Bác Hiệp và cô Liên đi xe đạp từ làng lên tỉnh trên quãng đường dài 30 km, khởi hành cùng một lúc. Vận tốc xe của bác Hiệp lớn hơn vận tốc xe của cô Liên là 3 km/h nên bác Hiệp đã đến tỉnh trước cô Liên nửa giờ. Tính vận tốc xe của mỗi người.

48. Từ một miếng tôn hình chữ nhật người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh bằng 5 dm để làm thành một cái thùng hình hộp chữ nhật không nắp có dung tích 1500 dm^3 (h. 15). Hãy tính kích thước của miếng tôn lúc đầu, biết rằng chiều dài của nó gấp đôi chiều rộng.



Hình 15

49. Hai đội thợ quét sơn một ngôi nhà. Nếu họ cùng làm thì trong 4 ngày xong việc. Nếu họ làm riêng thì đội I hoàn thành công việc nhanh hơn đội II là 6 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để xong việc ?

50. Miếng kim loại thứ nhất nặng 880 g, miếng kim loại thứ hai nặng 858 g. Thể tích của miếng thứ nhất nhỏ hơn thể tích của miếng thứ hai là 10 cm^3, nhưng khối lượng riêng của miếng thứ nhất lớn hơn khối lượng riêng của miếng thứ hai là 1 g/cm^3. Tìm khối lượng riêng của mỗi miếng kim loại.

51. Người ta đổ thêm 200 g nước vào một dung dịch chứa 40 g muối thì nồng độ của dung dịch giảm đi 10%. Hỏi trước khi đổ thêm nước thì dung dịch chứa bao nhiêu nước ?

52. Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 30 km. Một canô đi từ bến A đến bến B, nghỉ 40 phút ở bến B rồi quay lại bến A. Kể từ lúc khởi hành đến khi về tới bến A hết tất cả 6 giờ. Hãy tìm vận tốc của canô trong nước yên lặng, biết rằng vận tốc của nước chảy là 3 km/h.

53. ***Tỉ số vàng.*** Đố em chia được đoạn AB cho trước thành hai đoạn sao cho tỉ số giữa đoạn lớn với đoạn AB bằng tỉ số giữa đoạn nhỏ với đoạn lớn (h. 16). Hãy tìm tỉ số ấy.

Đó chính là bài toán mà Ơ-clít đưa ra từ thế kỉ III trước Công nguyên. Tỉ số nói trong bài toán được gọi là *tỉ số vàng*, còn phép chia nói trên được gọi là *phép chia vàng* hay *phép chia hoàng kim.*



Hình 16

Hướng dẫn. Giả sử M là điểm chia và AM > MB. Gọi tỉ số cần tìm là x.

Ôn tập chương IV

Câu hỏi

1. Hãy vẽ đồ thị của các hàm số $y = 2x^2$, $y = -2x^2$. Dựa vào đồ thị để trả lời các câu hỏi sau :

a) Nếu a > 0 thì hàm số $y = ax^2$ đồng biến khi nào ? Nghịch biến khi nào ?

Với giá trị nào của x thì hàm số đạt giá trị nhỏ nhất ? Có giá trị nào của x để hàm số đạt giá trị lớn nhất không ?

Nếu a < 0 thì hàm số đồng biến khi nào ? Nghịch biến khi nào ? Với giá trị nào của x thì hàm số đạt giá trị lớn nhất ? Có giá trị nào của x để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất không ?

b) Đồ thị của hàm số $y = ax^2$ có những đặc điểm gì (trường hợp a > 0, trường hợp a < 0) ?

2. Đối với phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, hãy viết công thức tính Δ, Δ'.

Khi nào thì phương trình vô nghiệm ?

Khi nào phương trình có hai nghiệm phân biệt ? Viết công thức nghiệm.

Khi nào phương trình có nghiệm kép ? Viết công thức nghiệm.

Vì sao khi a và c trái dấu thì phương trình có hai nghiệm phân biệt ?

3. Viết hệ thức Vi ét đối với các nghiệm của phương trình bậc hai

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0).$$

Nêu điều kiện để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có một nghiệm bằng 1. Khi đó, viết công thức nghiệm thứ hai. Áp dụng : nhẩm nghiệm của phương trình

$$1954x^2 + 21x - 1975 = 0.$$

Nêu điều kiện để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có một nghiệm bằng 1. Khi đó, viết công thức nghiệm thứ hai. Áp dụng : nhẩm nghiệm của phương trình

$$2005x^2 + 104x - 1901 = 0.$$

4. Nêu cách tìm hai số, biết tổng S và tích P của chúng.

Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau :

a) $\begin{cases} u + v = 3 \\ uv = -8 \end{cases}$; b) $\begin{cases} u + v = -5 \\ uv = 10 \end{cases}$.

5. Nêu cách giải phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$.

Tóm tắt các kiến thức cần nhớ

Hàm số $y = ax^2$ $(a \neq 0)$

a > 0	a < 0
• Hàm số nghịch biến khi $x < 0$, đồng biến khi $x > 0$.	• Hàm số đồng biến khi $x < 0$, nghịch biến khi $x > 0$.
• $y = 0$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số, đạt được khi $x = 0$.	• $y = 0$ là giá trị lớn nhất của hàm số, đạt được khi $x = 0$.

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- $\Delta > 0$: phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\ ;\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- $\Delta = 0$: phương trình có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

- $\Delta < 0$: phương trình vô nghiệm.

$$\Delta' = b'^2 - ac \quad (b = 2b')$$

- $\Delta' > 0$: phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}\ ;\ x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

- $\Delta' = 0$: phương trình có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}$$

- $\Delta' < 0$: phương trình vô nghiệm.

Hệ thức Vi-ét và ứng dụng

- Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}.$$

- Muốn tìm hai số u và v, biết $u + v = S$, $uv = P$, ta giải phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

(Điều kiện để có u và v là $S^2 - 4P \geq 0$).

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{c}{a}.$$

- Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm

$$x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{c}{a}.$$

Bài tập

54. Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ và $y = -\frac{1}{4}x^2$ trên cùng một hệ trục toạ độ.

a) Qua điểm B (0 ; 4) kẻ đường thẳng song song với trục Ox. Nó cắt đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{4}x^2$ tại hai điểm M và M'. Tìm hoành độ của M và M'.

b) Tìm trên đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{4}x^2$ điểm N có cùng hoành độ với M, điểm N' có cùng hoành độ với M'. Đường thẳng NN' có song song với Ox không ? Vì sao ? Tìm tung độ của N và N' bằng hai cách :

– Ước lượng trên hình vẽ ;

– Tính toán theo công thức.

55. Cho phương trình $x^2 - x - 2 = 0$.

a) Giải phương trình.

b) Vẽ hai đồ thị $y = x^2$ và $y = x + 2$ trên cùng một hệ trục toạ độ.

c) Chứng tỏ rằng hai nghiệm tìm được trong câu a) là hoành độ giao điểm của hai đồ thị.

56. Giải các phương trình :

a) $3x^4 - 12x^2 + 9 = 0$; b) $2x^4 + 3x^2 - 2 = 0$; c) $x^4 + 5x^2 + 1 = 0$.

57. Giải các phương trình :

a) $5x^2 - 3x + 1 = 2x + 11$; b) $\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{x+5}{6}$;

c) $\frac{x}{x-2} = \frac{10-2x}{x^2-2x}$; d) $\frac{x+0,5}{3x+1} = \frac{7x+2}{9x^2-1}$;

e) $2\sqrt{3}x^2 + x + 1 = \sqrt{3}(x+1)$; f) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 4 = 3(x+\sqrt{2})$.

58. Giải các phương trình :

a) $1,2x^3 - x^2 - 0,2x = 0$; b) $5x^3 - x^2 - 5x + 1 = 0$.

59. Giải phương trình bằng cách đặt ẩn phụ :

a) $2(x^2 - 2x)^2 + 3(x^2 - 2x) + 1 = 0$; b) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$.

60. Với mỗi phương trình sau, đã biết một nghiệm (ghi kèm theo), hãy tìm nghiệm kia :

a) $12x^2 - 8x + 1 = 0,\ x_1 = \dfrac{1}{2}$; b) $2x^2 - 7x - 39 = 0,\ x_1 = -3$;

c) $x^2 + x - 2 + \sqrt{2} = 0,\ x_1 = -\sqrt{2}$; d) $x^2 - 2mx + m - 1 = 0,\ x_1 = 2$.

61. Tìm hai số u và v trong mỗi trường hợp sau :

a) $u + v = 12$, $uv = 28$ và $u > v$; b) $u + v = 3$, $uv = 6$.

62. Cho phương trình $7x^2 + 2(m - 1)x - m^2 = 0$.

a) Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm ?

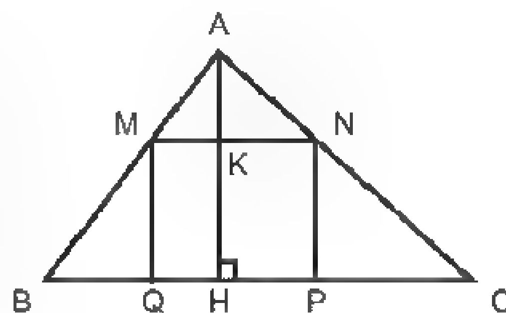
b) Trong trường hợp phương trình có nghiệm, dùng hệ thức Vi ét, hãy tính tổng các bình phương hai nghiệm của phương trình theo m.

63. Sau hai nam, số dân của một thành phố tang từ 2 000 000 người lên 2 020 050 người. Hỏi trung bình mỗi nam dân số của thành phố đó tang bao nhiêu phần trăm ?

64. Bài toán yêu cầu tìm tích của một số dương với một số lớn hơn nó 2 đơn vị, nhưng bạn Quân nhầm đầu bài lại tính tích của một số dương với một số bé hơn nó 2 đơn vị. Kết quả của bạn Quân là 120 Hỏi nếu làm đúng đầu bài đã cho thì kết quả phải là bao nhiêu ?

65. Một xe lửa đi từ Hà Nội vào Bình Sơn (Quảng Ngãi). Sau đó 1 giờ, một xe lửa khác đi từ Bình Sơn ra Hà Nội với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe lửa thứ nhất là 5 km/h. Hai xe gặp nhau tại một ga ở chính giữa quãng đường. Tìm vận tốc của mỗi xe, giả thiết rằng quãng đường Hà Nội Bình Sơn dài 900 km.

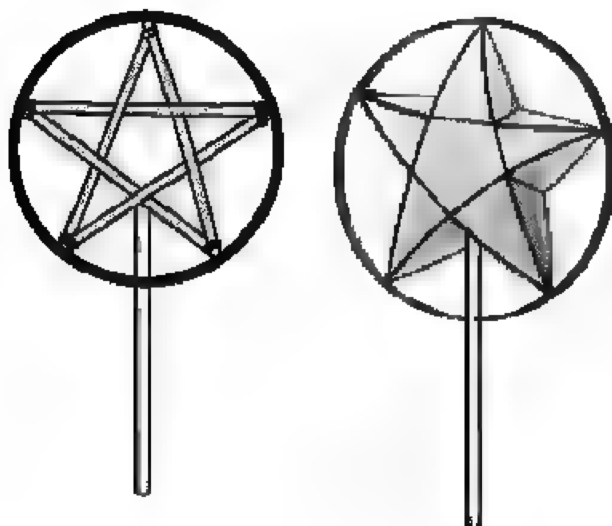
66. Cho tam giác ABC có BC = 16 cm, đường cao AH = 12 cm. Một hình chữ nhật MNPQ có đỉnh M thuộc cạnh AB, đỉnh N thuộc cạnh AC còn hai đỉnh P và Q thuộc cạnh BC (h. 17). Xác định vị trí của điểm M trên cạnh AB sao cho diện tích của hình chữ nhật đó bằng $36\ cm^2$.



Hình 17

Phần HÌNH HỌC

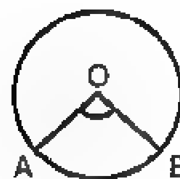
Chương III - GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN



Đèn ông sao

§1. Góc ở tâm. Số đo cung

Góc AOB có quan hệ gì với cung AB ?



1. Góc ở tâm

ĐỊNH NGHĨA

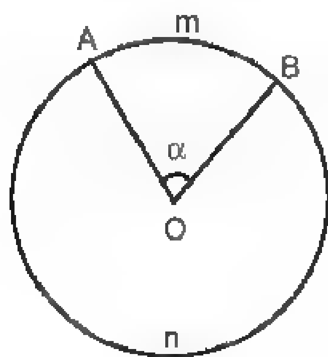
Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn được gọi là góc ở tâm.

• Hai cạnh của góc ở tâm cắt đường tròn tại hai điểm, do đó chia đường tròn thành hai cung. Với các góc α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) thì cung nằm bên trong góc được gọi là "cung nhỏ" và cung nằm bên ngoài góc được gọi là "cung lớn".

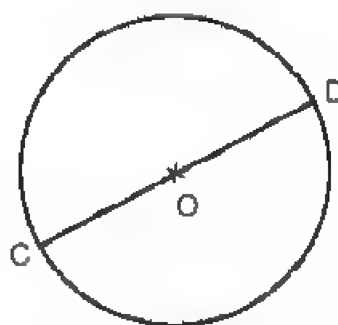
Cung AB được kí hiệu là $\overset{\frown}{AB}$. Để phân biệt hai cung có chung các mút là A và B như ở hình 1a), ta kí hiệu : $\overset{\frown}{AmB}$, $\overset{\frown}{AnB}$.

$\overset{\frown}{AmB}$ là cung nhỏ và $\overset{\frown}{AnB}$ là cung lớn.

Với $\alpha = 180^0$ thì mỗi cung là một nửa đường tròn (h.1b).



a) $0^0 < \alpha < 180^0$



b) $\alpha = 180^0$

Hình 1

• Cung nằm bên trong góc gọi là *cung bị chắn*. Ở hình 1a), $\overset{\frown}{AmB}$ là *cung bị chắn bởi góc* AOB, ta còn nói góc AOB *chắn cung nhỏ* AmB. Ở hình 1b), ta cũng nói góc bẹt COD *chắn* nửa đường tròn

2. Số đo cung

ĐỊNH NGHĨA

• *Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.*

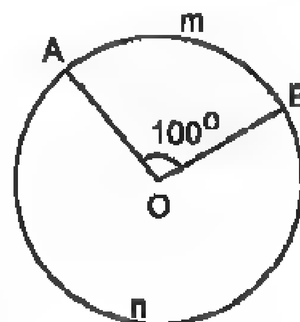
• *Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa* 360^0 *và số đo của cung nhỏ* (có chung hai mút với cung lớn).

• *Số đo của nửa đường tròn bằng* 180^0.

Số đo của cung AB được kí hiệu là sđ $\overset{\frown}{AB}$.

Ví dụ. Ở hình 2, cung nhỏ AmB có số đo là 100^0, cung lớn AnB có số đo là

$$\text{sđ}\overset{\frown}{AnB} = 360^0 - 100^0 = 260^0.$$



Hình 2

➢ ***Chú ý***

– Cung nhỏ có số đo nhỏ hơn 180^0 ;

– Cung lớn có số đo lớn hơn 180^0 ;

– Khi hai mút của cung trùng nhau, ta có "cung không" với số đo 0^0 và cung cả đường tròn có số đo 360^0.

3. So sánh hai cung

Ta chỉ so sánh hai cung trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau. Khi đó :

- *Hai cung được gọi là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau ;*
- *Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn được gọi là cung lớn hơn.*

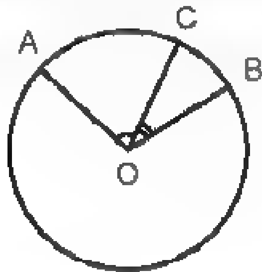
Hai cung AB và CD bằng nhau được kí hiệu là $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

Cung EF nhỏ hơn cung GH được kí hiệu là $\overset{\frown}{EF} < \overset{\frown}{GH}$. Trong trường hợp này ta cũng nói cung GH lớn hơn cung EF và kí hiệu là $\overset{\frown}{GH} > \overset{\frown}{EF}$

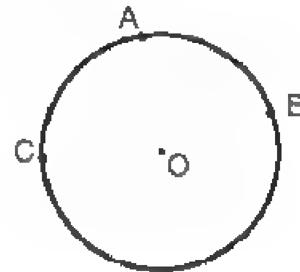
?1 *Hãy vẽ một đường tròn rồi vẽ hai cung bằng nhau.*

4. Khi nào thì sđ$\overset{\frown}{AB}$ = sđ$\overset{\frown}{AC}$ + sđ$\overset{\frown}{CB}$?

Cho C là một điểm nằm trên cung AB, khi đó ta nói : điểm C *chia* cung AB thành hai cung AC và CB.



Hình 3. Điểm C nằm trên cung nhỏ AB



Hình 4. Điểm C nằm trên cung lớn AB

ĐỊNH LÍ

> Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì :
>
> sđ$\overset{\frown}{AB}$ = sđ$\overset{\frown}{AC}$ + sđ$\overset{\frown}{CB}$.

?2 *Hãy chứng minh đẳng thức* sđ$\overset{\frown}{AB}$ = sđ$\overset{\frown}{AC}$ + sđ$\overset{\frown}{CB}$ *trong trường hợp điểm C nằm trên cung nhỏ* AB *(h. 3).*

Gợi ý : Chuyển số đo cung sang số đo của góc ở tâm chắn cung đó.

Bài tập

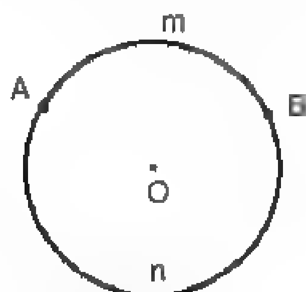
1. Kim giờ và kim phút của đồng hồ tạo thành một góc ở tâm có số đo là bao nhiêu độ vào những thời điểm sau :

a) 3 giờ ; b) 5 giờ ; c) 6 giờ ; d) 12 giờ ; e) 20 giờ ?

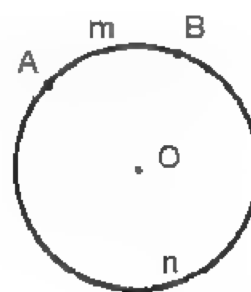
2. Cho hai đường thẳng xy và st cắt nhau tại O, trong các góc tạo thành có góc 40°. Vẽ một đường tròn tâm O. Tính số đo của các góc ở tâm xác định bởi hai trong bốn tia gốc O.

3. Trên các hình 5, 6, hãy dùng dụng cụ đo góc để tìm số đo cung AmB.

Từ đó, tính số đo cung AnB tương ứng.



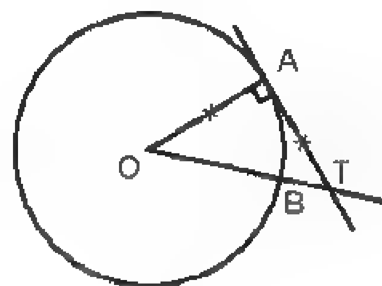
Hình 5



Hình 6

Luyện tập

4. Xem hình 7. Tính số đo của góc ở tâm AOB và số đo cung lớn AB.



Hình 7

5. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B cắt nhau tại M. Biết $\widehat{AMB} = 35^{\circ}$.

a) Tính số đo của góc ở tâm tạo bởi hai bán kính OA, OB.

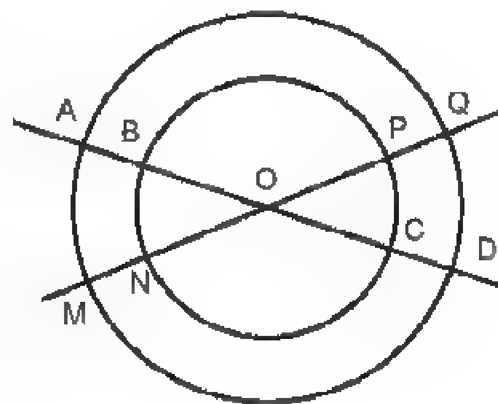
b) Tính số đo mỗi cung AB (cung lớn và cung nhỏ).

6. Cho tam giác đều ABC. Gọi O là tâm của đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C.

a) Tính số đo các góc ở tâm tạo bởi hai trong ba bán kính OA, OB, OC.

b) Tính số đo các cung tạo bởi hai trong ba điểm A, B, C

7. Cho hai đường tròn cùng tâm O với bán kính khác nhau. Hai đường thẳng đi qua O cắt hai đường tròn đó tại các điểm A, B, C, D, M, N, P, Q (h. 8).



Hình 8

a) Em có nhận xét gì về số đo của các cung nhỏ AM, CP, BN, DQ ?

b) Hãy nêu tên các cung nhỏ bằng nhau.

c) Hãy nêu tên hai cung lớn bằng nhau.

8. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai ? Vì sao ?

a) Hai cung bằng nhau thì có số đo bằng nhau.

b) Hai cung có số đo bằng nhau thì bằng nhau.

c) Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn là cung lớn hơn.

d) Trong hai cung trên một đường tròn, cung nào có số đo nhỏ hơn thì nhỏ hơn.

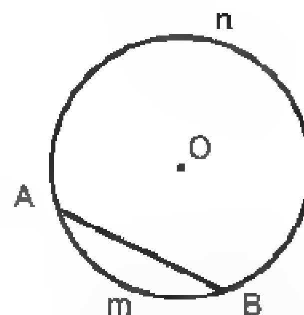
9. Trên đường tròn tâm O lấy ba điểm A, B, C sao cho $\widehat{AOB} = 100^\circ$, sđ$\overset{\frown}{AC} = 45^\circ$. Tính số đo của cung nhỏ BC và cung lớn BC. (Xét cả hai trường hợp : điểm C nằm trên cung nhỏ AB, điểm C nằm trên cung lớn AB).

§2. Liên hệ giữa cung và dây

Chuyển việc so sánh hai cung sang việc so sánh hai dây và ngược lại

Người ta dùng cụm từ "*cung căng dây*" hoặc "*dây căng cung*" để chỉ mối liên hệ giữa cung và dây có chung hai mút.

Trong một đường tròn, mỗi dây căng hai cung phân biệt. Với hai định lí dưới đây, ta chỉ xét những cung nhỏ.



Hình 9. Dây AB *căng hai cung* AmB *và* AnB.

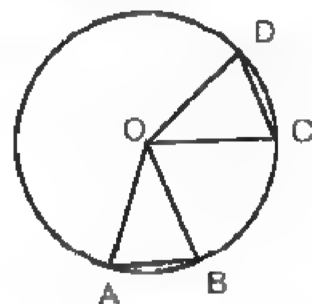
1. Định lí 1

> *Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau :*
>
> *a) Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.*
>
> *b) Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.*

Cụ thể, với hình 10, ta có giả thiết và kết luận của định lí 1 như sau :

a) $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} \Rightarrow AB = CD$;

b) $AB = CD \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.



Hình 10

?1 *Hãy chứng minh định lí trên.*

Hướng dẫn. Chứng minh hai tam giác OAB và OCD bằng nhau (h. 10).

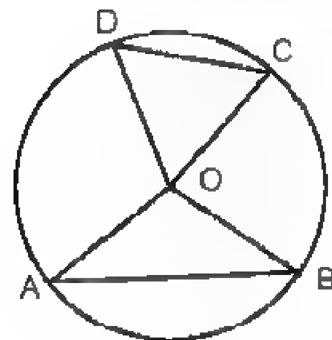
2. Định lí 2

> *Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau :*
>
> *a) Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.*
>
> *b) Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.*

?2 *Xem hình 11.*

Hãy viết giả thiết và kết luận của định lí.

(Không yêu cầu học sinh chứng minh định lí này).

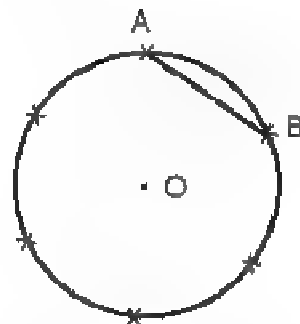


Hình 11

Bài tập

10. a) Vẽ đường tròn tâm O, bán kính R = 2 cm. Nêu cách vẽ cung AB có số đo bằng 60°. Hỏi dây AB dài bao nhiêu xentimét ?

b) Làm thế nào để chia được đường tròn thành sáu cung bằng nhau như trên hình 12.



Hình 12

11. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B. Kẻ các đường kính AOC, AO'D. Gọi E là giao điểm thứ hai của AC với đường tròn (O').

a) So sánh các cung nhỏ BC, BD.

b) Chứng minh rằng B là *điểm chính giữa* của cung EBD (tức là điểm B chia cung EBD thành hai cung bằng nhau : $\overset{\frown}{BE} - \overset{\frown}{BD}$).

12. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia AB lấy một điểm D sao cho AD – AC. Vẽ đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác DBC. Từ O lần lượt hạ các đường vuông góc OH, OK với BC và BD ($H \in BC$, $K \in BD$).

a) Chứng minh rằng OH > OK.

b) So sánh hai cung nhỏ BD và BC.

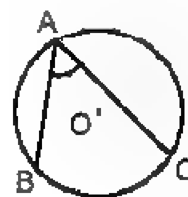
13. Chứng minh rằng trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.

14. a) Chứng minh rằng đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây cang cung ấy. Mệnh đề đảo có đúng không ? Hãy nêu thêm điều kiện để mệnh đề đảo đúng.

b) Chứng minh rằng đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây cang cung ấy và ngược lại.

§3. Góc nội tiếp

Số đo của góc BAC có quan hệ gì với số đo của cung BC ?

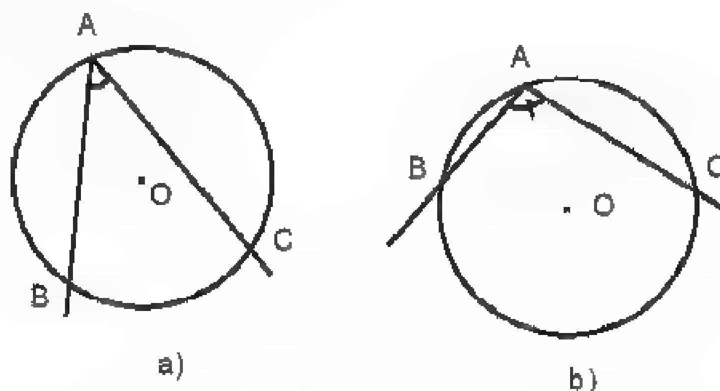


1. Định nghĩa

Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.

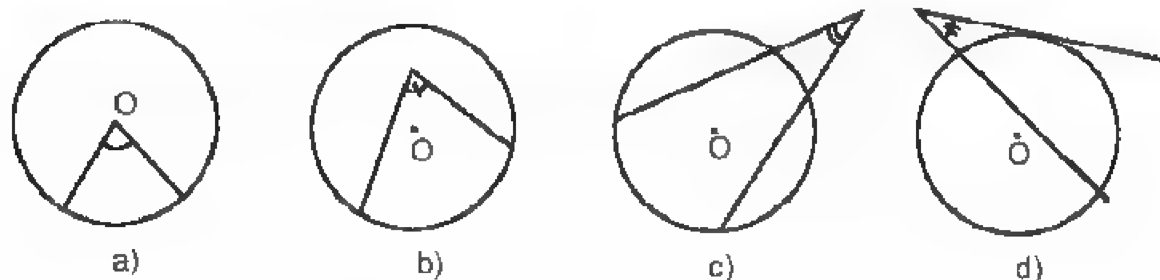
Cung nằm bên trong góc được gọi là cung bị chắn.

Ở hình 13a) cung bị chắn là cung nhỏ BC ; ở hình 13b) cung bị chắn là cung lớn BC.

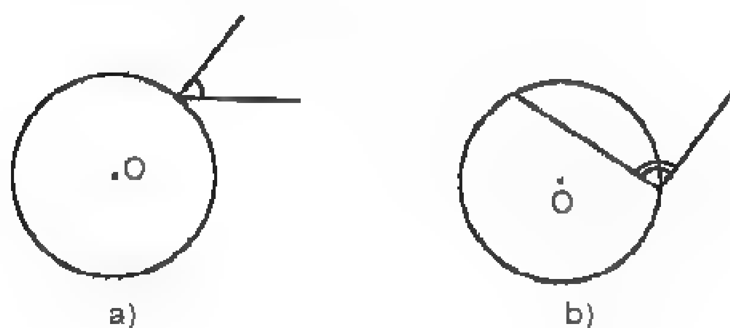


Hình 13. $\widehat{BAC}$ *là góc nội tiếp.*

?1 *Vì sao các góc ở hình 14 và hình 15 không phải là góc nội tiếp ?*



Hình 14



Hình 15

?2 *Bằng dụng cụ, hãy so sánh số đo của góc nội tiếp* $\widehat{BAC}$ *với số đo của cung bị chắn* BC *trong mỗi hình 16, 17, 18 dưới đây.*

2. Định lí

> *Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn*

Chứng minh. Ta phân biệt ba trường hợp :

– Tâm đường tròn nằm trên một cạnh của góc.

Tâm đường tròn nằm bên trong góc.

– Tâm đường tròn nằm bên ngoài góc.

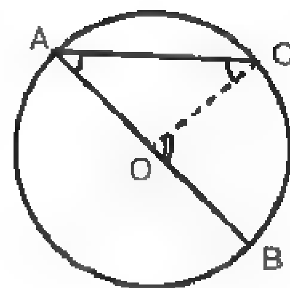
a) *Tâm O nằm trên một cạnh của góc* BAC (h. 16).

Áp dụng định lí về góc ngoài của tam giác vào tam giác cân OAC, ta có

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC},$$

nhưng góc ở tâm $\widehat{BOC}$ chắn cung nhỏ BC. Vậy

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC}$$



Hình 16

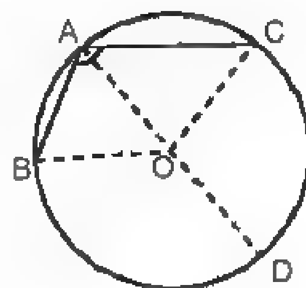
b) *Tâm O nằm bên trong góc* BAC (h. 17).

Ta vẽ đường kính AD và đưa về trường hợp a).

Vì O nằm bên trong góc BAC nên tia AO nằm giữa hai tia AB và AC, điểm D nằm trên cung BC, ta có các hệ thức

$$\widehat{BAD} + \widehat{DAC} = \widehat{BAC},$$

$$\text{sđ}\overset{\frown}{BD} + \text{sđ}\overset{\frown}{DC} = \text{sđ}\overset{\frown}{BC}.$$



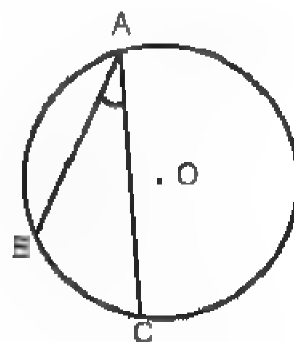
Hình 17

Theo trường hợp a) và căn cứ vào hai hệ thức trên, ta được

$$+\begin{array}{l}\widehat{BAD} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BD}\\ \widehat{DAC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{DC}\\ \hline \widehat{BAC} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BC}.\end{array}$$

c) *Tâm O nằm bên ngoài góc* BAC (h. 18).

Học sinh tự chứng minh, xem như bài tập.



Hình 18

3. Hệ quả

Trong một đường tròn :

a) Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

b) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

c) Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng 90°) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.

d) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.

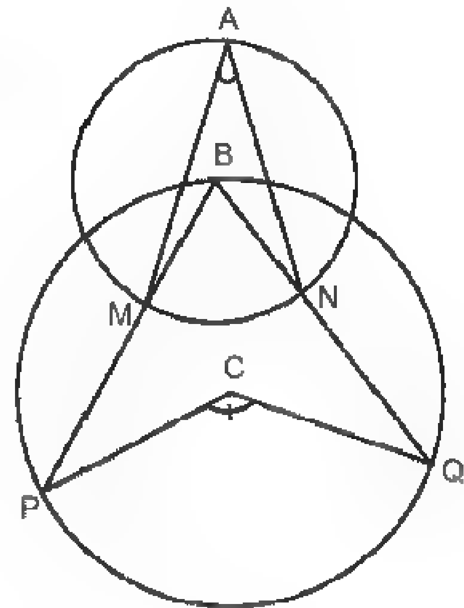
?3 *Hãy vẽ hình minh hoạ các tính chất trên.*

Bài tập

15. Các khẳng định sau đây đúng hay sai ?

a) Trong một đường tròn, các góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

b) Trong một đường tròn, các góc nội tiếp bằng nhau thì cùng chắn một cung.



Hình 19

16. Xem hình 19 (hai đường tròn có tâm là B, C và điểm B nằm trên đường tròn tâm C).

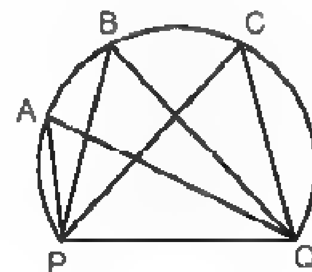
a) Biết $\widehat{MAN} = 30^\circ$, tính $\widehat{PCQ}$.

b) Nếu $\widehat{PCQ} = 136^\circ$ thì $\widehat{MAN}$ có số đo là bao nhiêu ?

17. Muốn xác định tâm của một đường tròn mà chỉ dùng êke thì phải làm như thế nào ?

18. Một huấn luyện viên cho cầu thủ tập sút bóng vào cầu môn PQ. Bóng được đặt ở các vị trí A, B, C trên một cung tròn như hình 20.

Hãy so sánh các góc $\widehat{PAQ}$, $\widehat{PBQ}$, $\widehat{PCQ}$.



Hình 20

Luyện tập

19. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB và S là một điểm nằm bên ngoài đường tròn. SA và SB lần lượt cắt đường tròn tại M, N. Gọi H là giao điểm của BM và AN. Chứng minh rằng SH vuông góc với AB.

20. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ các đường kính AC và AD của hai đường tròn. Chứng minh rằng ba điểm C, B, D thẳng hàng.

21. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ đường thẳng qua A cắt (O) tại M và cắt (O') tại N (A nằm giữa M và N). Hỏi MBN là tam giác gì ? Tại sao ?

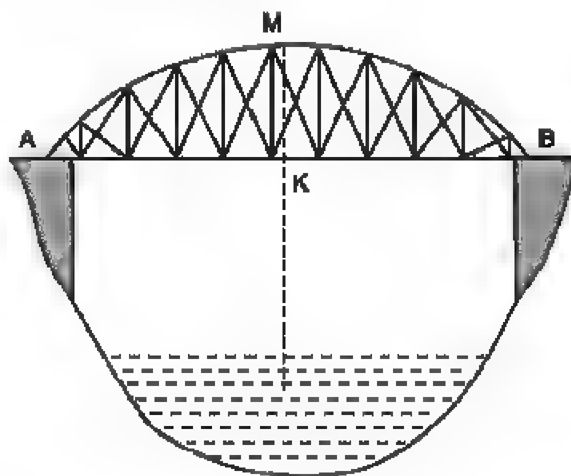
22. Trên đường tròn (O) đường kính AB, lấy điểm M (khác A và B). Vẽ tiếp tuyến của (O) tại A. Đường thẳng BM cắt tiếp tuyến đó tại C. Chứng minh rằng ta luôn có :

$$MA^2 = MB \, . \, MC.$$

23. Cho đường tròn (O) và một điểm M cố định không nằm trên đường tròn. Qua M kẻ hai đường thẳng. Đường thẳng thứ nhất cắt (O) tại A và B. Đường thẳng thứ hai cắt (O) tại C và D. Chứng minh MA.MB = MC.MD.

Hướng dẫn. Xét cả hai trường hợp điểm M nằm bên trong và bên ngoài đường tròn. Trong mỗi trường hợp, xét hai tam giác đồng dạng.

24. Một chiếc cầu được thiết kế như hình 21 có độ dài AB = 40 m, chiều cao MK = 3 m. Hãy tính bán kính của đường tròn chứa cung AMB.



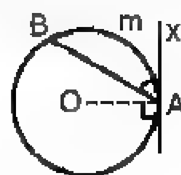
Hình 21

25. Dựng một tam giác vuông, biết cạnh huyền dài 4 cm và một cạnh góc vuông dài 2,5 cm.

26. Cho AB, BC, CA là ba dây của đường tròn (O). Từ điểm chính giữa M của cung AB vẽ dây MN song song với dây BC. Gọi giao điểm của MN và AC là S. Chứng minh SM = SC và SN = SA.

§4. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

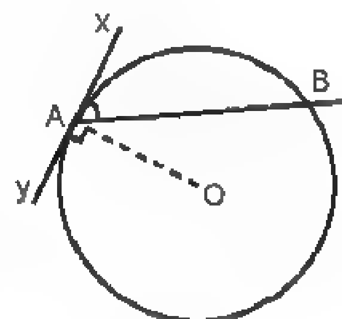
Số đo của góc BAx có quan hệ gì với số đo của cung AmB ?



1. Khái niệm góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

• Ở hình 22, xy là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A, tiếp điểm A là gốc chung của hai tia đối nhau. Mỗi tia đó là một tia tiếp tuyến. Góc BAx có đỉnh A nằm trên đường tròn, cạnh Ax là một tia tiếp tuyến còn cạnh kia chứa dây cung AB.

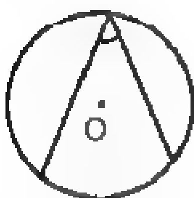
Ta gọi một góc như vậy là *góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung*.



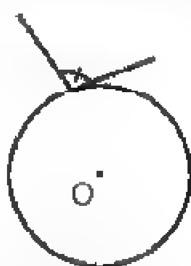
Hình 22. $\widehat{BAx}$ *(hoặc* $\widehat{BAy}$ *) là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung*

• Dây AB căng hai cung. Cung nằm bên trong góc là cung bị chắn. Ở hình 22, góc BAx có cung bị chắn là cung nhỏ AB, góc BAy có cung bị chắn là cung lớn AB.

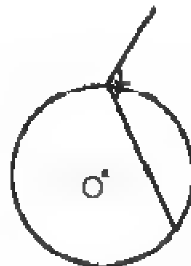
?1 *Hãy giải thích vì sao các góc ở các hình 23, 24, 25, 26 không phải là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.*



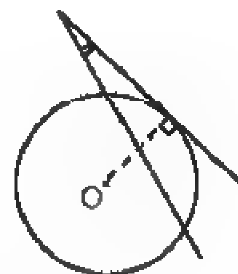
Hình 23



Hình 24



Hình 25



Hình 26

?2 *a) Hãy vẽ góc* BAx *tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung trong ba trường hợp sau :*

$$\widehat{BAx} = 30^\circ,\ \widehat{BAx} = 90^\circ,\ \widehat{BAx} = 120^\circ.$$

b) Trong mỗi trường hợp ở câu a), hãy cho biết số đo của cung bị chắn.

2. Định lí

> *Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.*

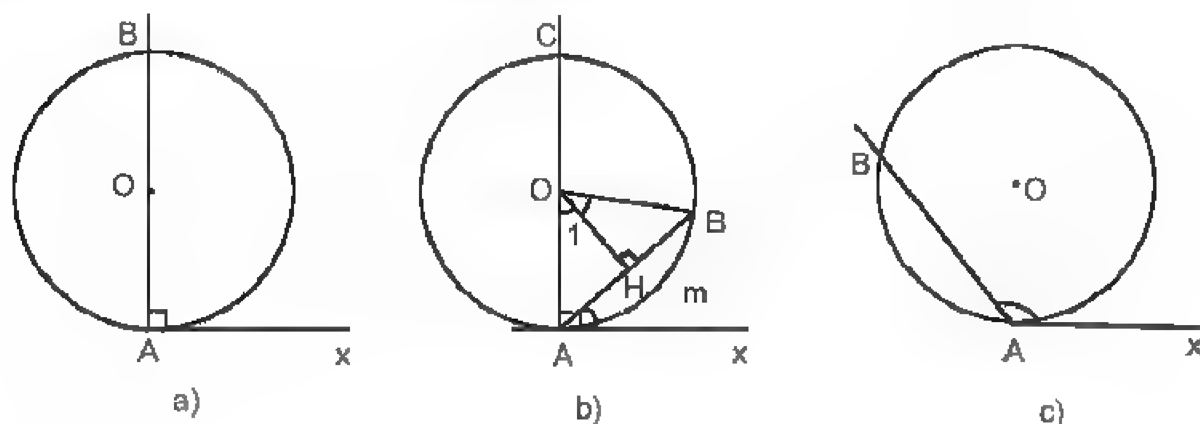
Chứng minh

Để chứng minh định lí này ta xét ba trường hợp :

– Tâm đường tròn nằm trên cạnh chứa dây cung.

– Tâm đường tròn nằm bên ngoài góc.

– Tâm đường tròn nằm bên trong góc.



Hình 27

a) *Tâm O nằm trên cạnh chứa dây cung* AB (h. 27a).

Ta có : $\widehat{BAx} = 90^\circ$,

$sđ\overset{\frown}{AB} = 180^\circ$.

Vậy $\widehat{BAx} = \frac{1}{2} sđ\overset{\frown}{AB}$.

b) *Tâm O nằm bên ngoài* $\widehat{BAx}$ (h. 27b).

Vẽ đường cao OH của tam giác cân OAB, ta có :

$\widehat{BAx} = \widehat{O_1}$ (hai góc này cùng phụ với $\widehat{OAB}$).

Nhưng $\widehat{O_1} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ (OH là tia phân giác của $\widehat{AOB}$),

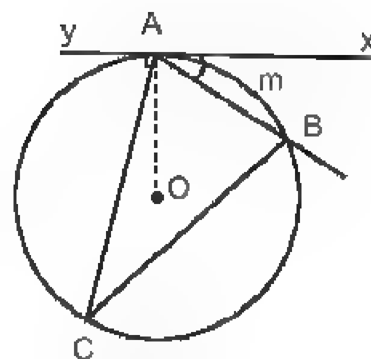
suy ra $\widehat{BAx} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$. Mặt khác $\widehat{AOB} = sđ\overset{\frown}{AmB}$,

vậy $\widehat{BAx} = \frac{1}{2} sđ\overset{\frown}{AmB}$.

c) *Tâm O nằm bên trong* $\widehat{BAx}$ (h. 27c).

Học sinh tự chứng minh, coi như bài tập.

?3 *Hãy so sánh số đo của $\widehat{BAx}$, $\widehat{ACB}$ với số đo của cung AmB (h. 28).*



Hình 28

3. Hệ quả

Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

Bài tập

27. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Lấy điểm P khác A và B trên đường tròn. Gọi T là giao điểm của AP với tiếp tuyến tại B của đường tròn. Chứng minh

$$\widehat{APO} = \widehat{PBT}.$$

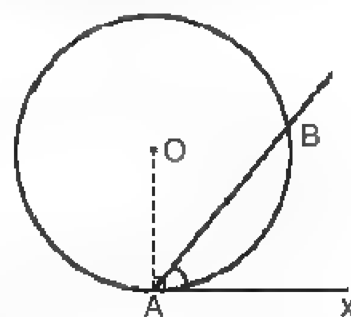
28. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O') cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai P. Tia PB cắt đường tròn (O') tại Q. Chứng minh đường thẳng AQ song song với tiếp tuyến tại P của đường tròn (O).

29. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Tiếp tuyến kẻ từ A đối với đường tròn (O') cắt (O) tại C và đối với đường tròn (O) cắt (O') tại D.

Chứng minh $\widehat{CBA} = \widehat{DBA}$.

30. Chứng minh *định lí đảo của định lí* về góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, cụ thể là :

Nếu góc BAx (với đỉnh A nằm trên đường tròn, một cạnh chứa dây cung AB), có số đo bằng nửa số đo của cung AB căng dây đó và cung này nằm bên trong góc đó thì cạnh Ax là một tia tiếp tuyến của đường tròn (h. 29).



Hình 29

Gợi ý. Có thể chứng minh trực tiếp hoặc chứng minh bằng phản chứng.

Luyện tập

31. Cho đường tròn (O ; R) và dây cung BC = R. Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C cắt nhau ở A. Tính $\widehat{ABC}$, $\widehat{BAC}$.

32. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Một tiếp tuyến của đường tròn tại P cắt đường thẳng AB tại T (điểm B nằm giữa O và T).

Chứng minh $\widehat{BTP} + 2.\widehat{TPB} = 90^\circ$.

33. Cho A, B, C là ba điểm trên một đường tròn. At là tiếp tuyến của đường tròn tại A. Đường thẳng song song với At cắt AB tại M và cắt AC tại N. Chứng minh AB . AM = AC . AN

34. Cho đường tròn (O) và điểm M nằm bên ngoài đường tròn đó. Qua điểm M kẻ tiếp tuyến MT và cát tuyến MAB.

Chứng minh $MT^2 = MA . MB$.

35. Trên bờ biển có một ngọn hải đăng cao 40 m. Với khoảng cách bao nhiêu kilômét thì người quan sát trên tàu bắt đầu trông thấy ngọn đèn này, biết rằng mắt người quan sát ở độ cao 10 m so với mực nước biển và bán kính Trái Đất gần bằng 6 400 km (h. 30) ?

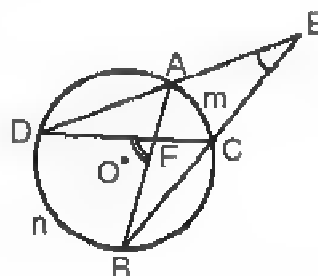


Hình 30

Hướng dẫn. Áp dụng kết quả của bài tập 34.

§5. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn

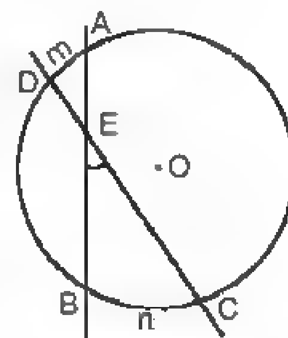
Số đo của góc E và số đo của góc DFB có quan hệ gì với số đo của các cung AmC và BnD ?



1. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn

Trong hình 31, góc BEC có đỉnh E nằm bên trong đường tròn (O) được gọi là *góc có đỉnh ở bên trong đường tròn*.

Ta quy ước rằng mỗi góc có đỉnh ở bên trong đường tròn chắn hai cung, một cung nằm bên trong góc và cung kia nằm bên trong góc đối đỉnh của nó. Trên hình 31, hai cung bị chắn của góc BEC là $\overset{\frown}{BnC}$ và $\overset{\frown}{AmD}$.



Hình 31

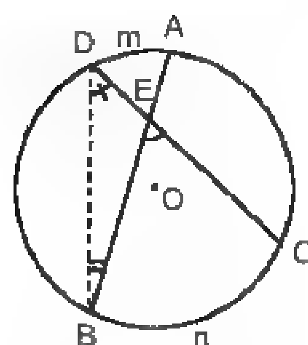
ĐỊNH LÍ

> *Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.*

?1 *Hãy chứng minh định lí trên.*

Gợi ý. Xem hình 32. Sử dụng góc ngoài của tam giác, chứng minh :

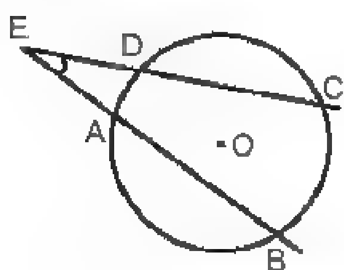
$$\widehat{BEC} = \frac{sđ\overset{\frown}{BnC} + sđ\overset{\frown}{AmD}}{2}.$$



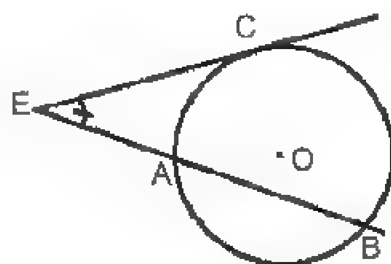
Hình 32

2. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn

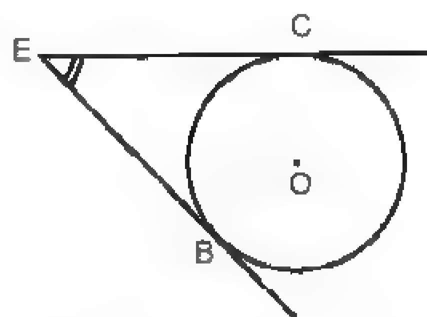
Các góc trên các hình 33, 34, 35 có đặc điểm chung là : đỉnh nằm ngoài đường tròn, các cạnh đều có điểm chung với đường tròn. Mỗi góc đó được gọi là *góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn*. Mỗi góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn có hai cung bị chắn. Đó là hai cung nằm bên trong góc.



Hình 33. Góc BEC có hai cạnh cắt đường tròn, hai cung bị chắn là hai cung nhỏ AD và BC.



Hình 34. Góc BEC có một cạnh là tiếp tuyến tại C và cạnh kia là cát tuyến, hai cung bị chắn là hai cung nhỏ AC và CB



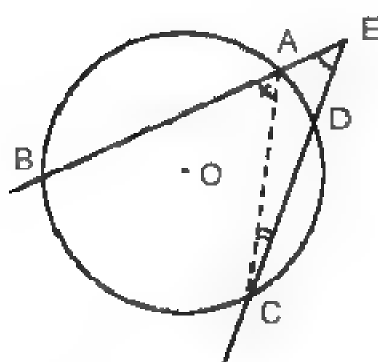
Hình 35. Góc BEC có hai cạnh là hai tiếp tuyến tại B và C, hai cung bị chắn là cung nhỏ BC và cung lớn BC

ĐỊNH LÍ

> *Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.*

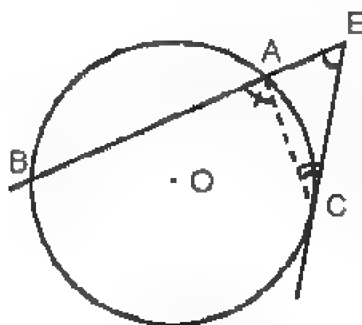
?2 *Hãy chứng minh định lí trên.*

Gợi ý. Sử dụng góc ngoài của tam giác trong ba trường hợp ở hình 36, 37, 38 (các cung nêu ra dưới hình là những cung bị chắn).



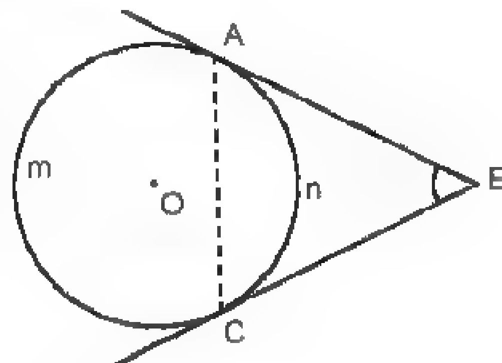
Hình 36

$\widehat{BEC} = \dfrac{sđ\overset\frown{BC} - sđ\overset\frown{AD}}{2}$



Hình 37

$\widehat{BEC} = \dfrac{sđ\overset\frown{BC} - sđ\overset\frown{CA}}{2}$



Hình 38

$\widehat{AEC} = \dfrac{sđ\overset\frown{AmC} - sđ\overset\frown{AnC}}{2}$

Bài tập

36. Cho đường tròn (O) và hai dây AB, AC. Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của $\overset\frown{AB}$ và $\overset\frown{AC}$. Đường thẳng MN cắt dây AB tại E và cắt dây AC tại H. Chứng minh tam giác AEH là tam giác cân.

37. Cho đường tròn (O) và hai dây AB, AC bằng nhau. Trên cung nhỏ AC lấy một điểm M. Gọi S là giao điểm của AM và BC. Chứng minh $\widehat{ASC} = \widehat{MCA}$.

38. Trên một đường tròn, lấy liên tiếp ba cung AC, CD, DB sao cho sđ$\overset\frown{AC}$ = sđ$\overset\frown{CD}$ = sđ$\overset\frown{DB}$ = 60°. Hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại E. Hai tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt nhau tại T. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{AEB} = \widehat{BTC}$;

b) CD là tia phân giác của $\widehat{BCT}$.

Luyện tập

39. Cho AB và CD là hai đường kính vuông góc của đường tròn (O). Trên cung nhỏ BD lấy một điểm M. Tiếp tuyến tại M cắt tia AB ở E, đoạn thẳng CM cắt AB ở S. Chứng minh ES = EM.

40. Qua điểm S nằm bên ngoài đường tròn (O), vẽ tiếp tuyến SA và cát tuyến SBC của đường tròn. Tia phân giác của góc BAC cắt dây BC tại D.

Chứng minh SA = SD.

41. Qua điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) vẽ hai cát tuyến ABC và AMN sao cho hai đường thẳng BN và CM cắt nhau tại một điểm S nằm bên trong đường tròn.

Chứng minh

$$\widehat{A} + \widehat{BSM} = 2.\widehat{CMN}.$$

42. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn. P, Q, R theo thứ tự là các điểm chính giữa của các cung bị chắn BC, CA, AB bởi các góc A, B, C.

a) Chứng minh $AP \perp QR$.

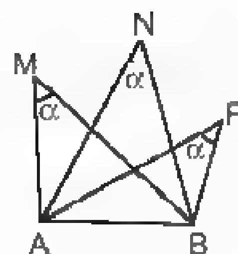
b) AP cắt CR tại I. Chứng minh tam giác CPI là tam giác cân.

43. Cho đường tròn (O) và hai dây cung song song AB, CD (A và C nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ BD) ; AD cắt BC tại I.

Chứng minh $\widehat{AOC} = \widehat{AIC}$.

§6. Cung chứa góc

Liêu ba điểm M, N, P có cùng thuộc một cung tròn căng dây AB hay không ?



1. Bài toán quỹ tích "cung chứa góc"

1) Bài toán. Cho đoạn thẳng AB và góc α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). Tìm quỹ tích (tập hợp) các điểm M thoả mãn $\widehat{AMB} = \alpha$. (Ta cũng nói quỹ tích các điểm M nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới góc α).

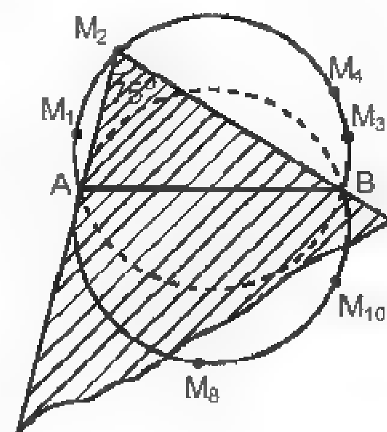
?1 *Cho đoạn thẳng CD.*

a) Vẽ ba điểm N_1, N_2, N_3 *sao cho* $\widehat{CN_1D} = \widehat{CN_2D} = \widehat{CN_3D} = 90^\circ$.

b) Chứng minh rằng các điểm N_1, N_2, N_3 *nằm trên đường tròn đường kính* CD.

?2 *Vẽ một góc trên bìa cứng (chẳng hạn, góc* 75°*). Cắt ra, ta được một mẫu hình như phần gạch chéo ở hình 39. Đóng hai chiếc đinh* A, B *cách nhau* 3 cm *trên một tấm gỗ phẳng.*

Dịch chuyển tấm bìa trong khe hở sao cho hai cạnh của góc luôn dính sát vào hai chiếc đinh A, B. *Đánh dấu các vị trí* M_1, M_2, M_3, ..., M_{10} *của đỉnh góc* ($\widehat{AM_1B} = \widehat{AM_2B} = \cdots = \widehat{AM_{10}B} = 75^\circ$).



Hình 39

Qua thực hành, hãy dự đoán quỹ đạo chuyển động của điểm M

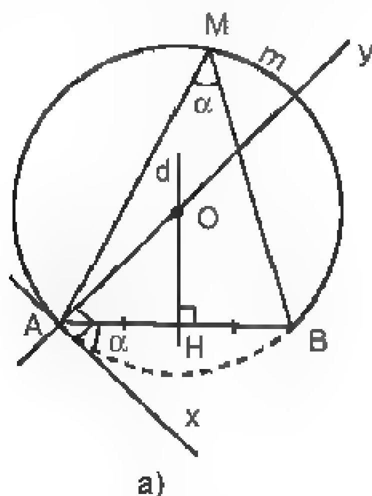
Theo dự đoán trên, ta sẽ chứng minh quỹ tích cần tìm là hai cung tròn.

Chứng minh

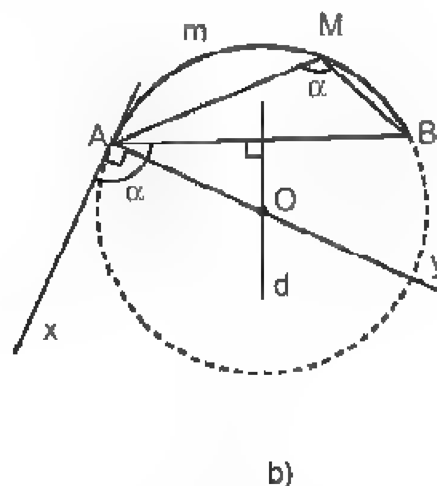
a) *Phần thuận* (h. 40).

Trước hết, ta hãy xét một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB.

Giả sử M là điểm thoả mãn $\widehat{AMB} = \alpha$ và nằm trong nửa mặt phẳng đang xét. Xét cung AmB đi qua ba điểm A, M, B.



a)



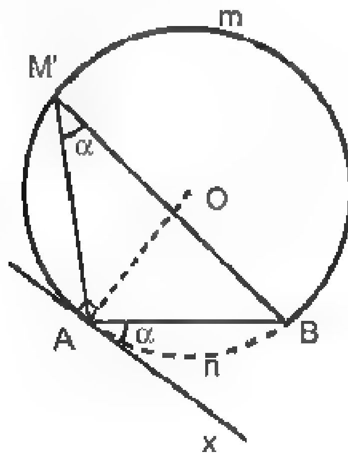
b)

Hình 40

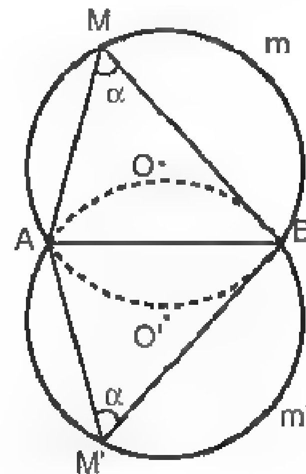
Ta sẽ chứng minh tâm O của đường tròn chứa cung đó là một điểm cố định (không phụ thuộc M). Thực vậy, trong nửa mặt phẳng bờ AB không chứa M, kẻ tia tiếp tuyến Ax của đường tròn đi qua ba điểm A, M, B thì góc tạo bởi Ax và AB bằng α, do đó tia Ax cố định. Tâm O phải nằm

trên đường thẳng Ay vuông góc với Ax tại A. Mặt khác, O phải nằm trên đường trung trực d của đoạn AB. Từ đó giao điểm O của d và Ay là điểm cố định, không phụ thuộc M (vì $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên Ay không vuông góc với AB và do đó Ay luôn cắt d tại đúng một điểm). Vậy M thuộc cung tròn AmB cố định.

b) *Phần đảo*. Lấy M' là một điểm thuộc cung AmB (h. 41), ta phải chứng minh $\widehat{AM'B} = \alpha$. Thật vậy, vì $\widehat{AM'B}$ là góc nội tiếp, $\widehat{xAB}$ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, hai góc này cùng chắn cung AnB nên $\widehat{AM'B} = \widehat{xAB} = \alpha$.



Hình 41



Hình 42

Tương tự, trên nửa mặt phẳng đối của nửa mặt phẳng đang xét, ta còn có cung Am'B đối xứng với cung AmB qua AB cũng có tính chất như $\overset{\frown}{AmB}$ (h. 42).

Mỗi cung trên được gọi là một *cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng* AB, tức là cung mà với mọi điểm M thuộc cung đó, ta đều có $\widehat{AMB} = \alpha$.

c) *Kết luận*. Với đoạn thẳng AB và góc α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) cho trước thì *quỹ tích các điểm* M *thoả mãn* $\widehat{AMB} = \alpha$ *là hai cung chứa góc α dựng trên đoạn* AB.

➤ ***Chú ý***

• Hai cung chứa góc α nói trên là hai cung tròn đối xứng với nhau qua AB

• Hai điểm A, B được coi là thuộc quỹ tích.

• Khi $\alpha = 90^\circ$ thì hai cung AmB và Am'B là hai nửa đường tròn đường kính AB. Như vậy ta có : *Quỹ tích các điểm nhìn đoạn thẳng* AB *cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính* AB.

• Trong hình 41, $\overset{\frown}{AmB}$ là cung chứa góc α thì $\overset{\frown}{AnB}$ là cung chứa góc $180^\circ - \alpha$.

2) Cách vẽ cung chứa góc α. (Xem hình 40a, b)

– Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB.

– Vẽ tia Ax tạo với AB góc α

Vẽ đường thẳng Ay vuông góc với Ax. Gọi O là giao điểm của Ay với d.

– Vẽ cung AmB, tâm O, bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax.

$\overset{\frown}{AmB}$ được vẽ như trên là một cung chứa góc α.

2. Cách giải bài toán quỹ tích

Muốn *chứng minh* quỹ tích (tập hợp) các điểm M thoả mãn tính chất $\mathcal{T}$ là một hình **H** nào đó, ta phải chứng minh hai phần :

Phần thuận : Mọi điểm có tính chất $\mathcal{T}$ đều thuộc hình **H**.

Phần đảo : Mọi điểm thuộc hình **H** đều có tính chất $\mathcal{T}$.

Kết luận : Quỹ tích (hay tập hợp) các điểm M có tính chất $\mathcal{T}$ là hình **H**

(Thông thường với bài toán "Tìm quỹ tích..." ta nên dự đoán hình **H** trước khi chứng minh).

Bài tập

44. Cho tam giác ABC vuông ở A, có cạnh BC cố định. Gọi I là giao điểm của ba đường phân giác trong. Tìm quỹ tích điểm I khi A thay đổi.

45. Cho các hình thoi ABCD có cạnh AB cố định. Tìm quỹ tích giao điểm O của hai đường chéo của các hình thoi đó.

46. Dựng một cung chứa góc 55° trên đoạn thẳng AB = 3 cm.

47. Gọi cung chứa góc 55° ở bài tập 46 là $\overset{\frown}{AmB}$. Lấy điểm M_1 nằm bên trong và điểm M_2 nằm bên ngoài đường tròn chứa cung này sao cho M_1, M_2 và cung AmB nằm cùng một phía đối với đường thẳng AB. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{AM_1B} > 55^\circ$; b) $\widehat{AM_2B} < 55^\circ$.

Luyện tập

48. Cho hai điểm A, B cố định. Từ A vẽ các tiếp tuyến với các đường tròn tâm B có bán kính không lớn hơn AB. Tìm quỹ tích các tiếp điểm.

49. Dựng tam giác ABC, biết BC = 6 cm, $\widehat{A} = 40^\circ$ và đường cao AH = 4 cm.

50. Cho đường tròn đường kính AB cố định, M là một điểm chạy trên đường tròn. Trên tia đối của tia MA lấy điểm I sao cho MI = 2MB.

a) Chứng minh $\widehat{AIB}$ không đổi.

b) Tìm tập hợp các điểm I nói trên.

51. Cho I, O lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $\widehat{A} = 60^\circ$. Gọi H là giao điểm của các đường cao BB' và CC'.

Chứng minh các điểm B, C, O, H, I cùng thuộc một đường tròn.

52. "Góc sút" của quả phạt đền 11 mét là bao nhiêu độ ? Biết rằng chiều rộng cầu môn là 7,32 m. Hãy chỉ ra hai vị trí khác trên sân có cùng "góc sút" như quả phạt đền 11 mét.

§7. Tứ giác nội tiếp

Ta luôn vẽ được một đường tròn đi qua các đỉnh của một tam giác. Phải chăng ta cũng làm được như vậy đối với một tứ giác ?

1. Khái niệm tứ giác nội tiếp

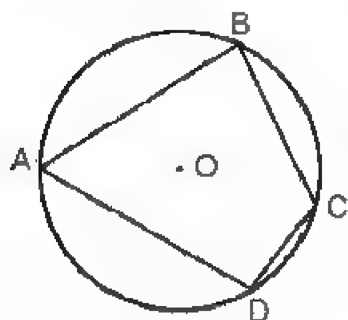
?1 *a) Vẽ một đường tròn tâm O rồi vẽ một tứ giác có tất cả các đỉnh nằm trên đường tròn đó.*

b) Vẽ một đường tròn tâm I rồi vẽ một tứ giác có ba đỉnh nằm trên đường tròn đó còn đỉnh thứ tư thì không.

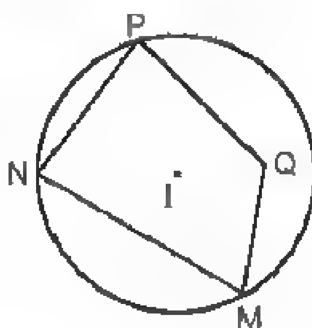
ĐỊNH NGHĨA. *Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn được gọi là tứ giác nội tiếp đường tròn (gọi tắt là tứ giác nội tiếp).*

Ví dụ. Tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp (h. 43). Tứ giác MNPQ không là tứ giác nội tiếp (h. 44).

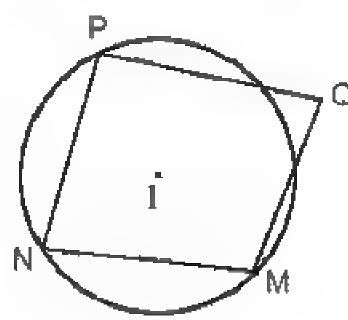
Ở hình 44, không thể có một đường tròn nào đi qua cả bốn đỉnh M, N, P, Q.



Hình 43



a)



b)

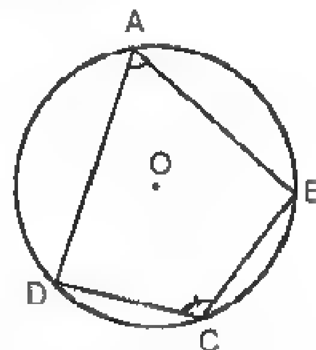
Hình 44

2. Định lí

> *Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối nhau bằng* 180°.

?2 *Xem hình 45. Hãy chứng minh định lí trên.*

Hướng dẫn. Cộng số đo của hai cung cùng căng một dây.



Hình 45

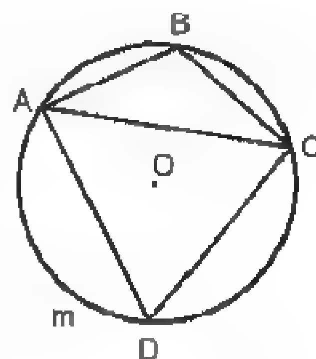
3. Định lí đảo

> *Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối nhau bằng* 180° *thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.*

Chứng minh

Giả sử tứ giác ABCD có $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$.

Ta vẽ đường tròn tâm O qua A, B, C (bao giờ cũng vẽ được đường tròn như vậy vì ba điểm A, B, C không thẳng hàng). Hai điểm A và C chia đường tròn (O) thành hai cung ABC và AmC, trong đó $\overset{\frown}{AmC}$ là cung chứa góc $(180^\circ - \widehat{B})$ dựng trên đoạn thẳng AC. Mặt khác, từ giả thiết suy ra $\widehat{D} = 180^\circ - \widehat{B}$. Vậy điểm D nằm trên cung AmC nói trên. Tức là tứ giác ABCD có cả bốn đỉnh nằm trên đường tròn (O) (h. 46).



Hình 46

Bài tập

53. Biết ABCD là tứ giác nội tiếp. Hãy điền vào ô trống trong bảng sau (nếu có thể) :

Trường hợp / Góc	1)	2)	3)	4)	5)	6)
$\widehat{A}$	80°		60°			95°
$\widehat{B}$	70°			40°	65°	
$\widehat{C}$		105°			74°	
$\widehat{D}$		75°				98°

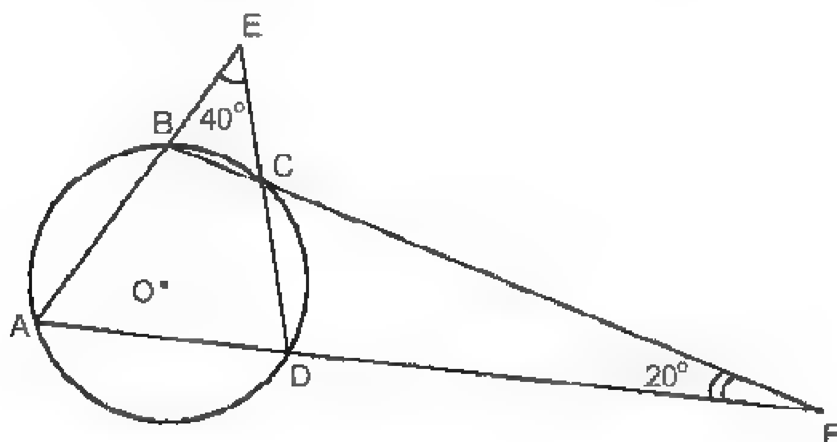
54. Tứ giác ABCD có $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$. Chứng minh rằng các đường trung trực của AC, BD, AB cùng đi qua một điểm.

55. Cho ABCD là một tứ giác nội tiếp đường tròn tâm M, biết $\widehat{DAB} = 80^\circ$, $\widehat{DAM} = 30^\circ$, $\widehat{BMC} = 70^\circ$.

Hãy tính số đo các góc $\widehat{MAB}$, $\widehat{BCM}$, $\widehat{AMB}$, $\widehat{DMC}$, $\widehat{AMD}$, $\widehat{MCD}$ và $\widehat{BCD}$.

Luyện tập

56. Xem hình 47. Hãy tìm số đo các góc của tứ giác ABCD.



Hình 47

57. Trong các hình sau, hình nào nội tiếp được trong một đường tròn :

Hình bình hành, hình chữ nhật, hình vuông, hình thang, hình thang vuông, hình thang cân ? Vì sao ?

58. Cho tam giác đều ABC. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa đỉnh A, lấy điểm D sao cho DB = DC và $\widehat{DCB} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$.

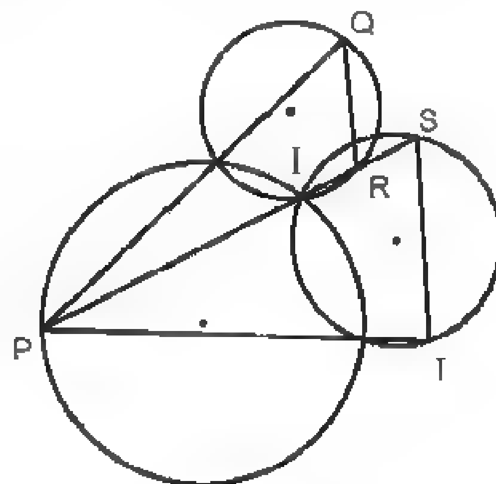
a) Chứng minh ABDC là tứ giác nội tiếp.

b) Xác định tâm của đường tròn đi qua bốn điểm A, B, D, C.

59. Cho hình bình hành ABCD. Đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C cắt đường thẳng CD tại P khác C. Chứng minh AP = AD.

60. Xem hình 48. Chứng minh QR // ST.

Hướng dẫn. Xét cặp góc so le trong $\widehat{PST}$, $\widehat{SRQ}$.



Hình 48

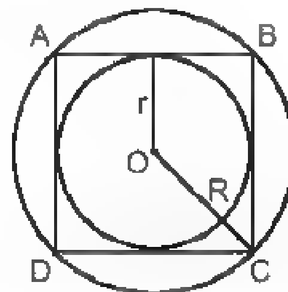
§8. Đường tròn ngoại tiếp. Đường tròn nội tiếp

> Ta đã biết, với bất kì tam giác nào cũng có một đường tròn ngoại tiếp và một đường tròn nội tiếp.
> Còn với đa giác thì sao ?

1. Định nghĩa

Xem hình 49. Ta nói đường tròn (O ; R) là đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD và ABCD là hình vuông nội tiếp đường tròn (O ; R).

Đường tròn (O ; r) là đường tròn nội tiếp hình vuông ABCD và ABCD là hình vuông ngoại tiếp đường tròn (O ; r).



Hình 49. Hai đường tròn đồng tâm (O ; R) và (O ; r) với $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

ĐỊNH NGHĨA

> *1) Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác được gọi là **đường tròn ngoại tiếp** đa giác và đa giác được gọi là **đa giác nội tiếp** đường tròn.*
>
> *2) Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác được gọi là **đường tròn nội tiếp** đa giác và đa giác được gọi là **đa giác ngoại tiếp** đường tròn.*

? *a) Vẽ đường tròn tâm* O *bán kính* $R = 2$ cm.

b) Vẽ một lục giác đều ABCDEF *có tất cả các đỉnh nằm trên đường tròn* (O).

c) Vì sao tâm O *cách đều các cạnh của lục giác đều ? Gọi khoảng cách này là* r.

d) Vẽ đường tròn (O ; r)

2. Định lí

> *Bất kì đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp, có một và chỉ một đường tròn nội tiếp.*

(Không yêu cầu học sinh chứng minh định lí này).

Trong đa giác đều, tâm của đường tròn ngoại tiếp trùng với tâm của đường tròn nội tiếp và được gọi là *tâm* của đa giác đều.

Bài tập

61. a) Vẽ đường tròn tâm O, bán kính 2 cm.

b) Vẽ hình vuông nội tiếp đường tròn (O) ở câu a).

c) Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp hình vuông ở câu b) rồi vẽ đường tròn (O ; r).

62. a) Vẽ tam giác đều ABC cạnh $a = 3$ cm.

b) Vẽ tiếp đường tròn (O ; R) ngoại tiếp tam giác đều ABC. Tính R.

c) Vẽ tiếp đường tròn (O ; r) nội tiếp tam giác đều ABC. Tính r.

d) Vẽ tiếp tam giác đều IJK ngoại tiếp đường tròn (O ; R).

63. Vẽ hình lục giác đều, hình vuông, tam giác đều cùng nội tiếp đường tròn (O ; R) rồi tính cạnh của các hình đó theo R.

64. Trên đường tròn bán kính R lần lượt đặt theo cùng một chiều, kể từ điểm A, ba cung AB, BC, CD sao cho sđ$\overset{\frown}{AB} - 60^\circ$, sđ$\overset{\frown}{BC} - 90^\circ$ và sđ$\overset{\frown}{CD} - 120^\circ$.

a) Tứ giác ABCD là hình gì ?

b) Chứng minh rằng hai đường chéo của tứ giác ABCD vuông góc với nhau.

c) Tính độ dài các cạnh của tứ giác ABCD theo R.

§9. Độ dài đường tròn, cung tròn

Nói . "Đô dài đường tròn bằng ba lần đường kính của nó" thì đúng hay sai ?

1. Công thức tính độ dài đường tròn

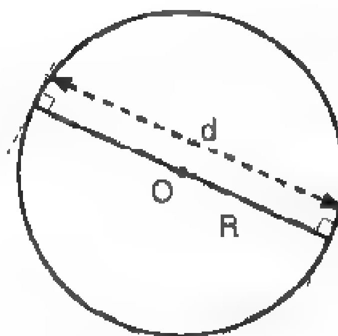
"Độ dài đường tròn" (còn gọi là "chu vi hình tròn") được kí hiệu là C.

Độ dài C của một đường tròn bán kính R (h. 50) được tính theo công thức

$$C = 2\pi R.$$

Nếu gọi d là đường kính đường tròn (d = 2R) thì

$$C - \pi d.$$



Hình 50

π (đọc là "pi") là kí hiệu của một số vô tỉ mà giá trị gần đúng thường được lấy là $\pi \approx 3,14$.

?1 *Em hãy tìm lại số π bằng cách sau :*

Vật liệu : Tấm bìa, kéo, compa, thước có chia khoảng, sợi chỉ.

a) Vẽ trên bìa năm đường tròn tâm O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 có bán kính khác nhau.

b) Cắt ra thành năm hình tròn.

c) Đo chu vi năm hình tròn đó bằng sợi chỉ (càng chính xác càng tốt).

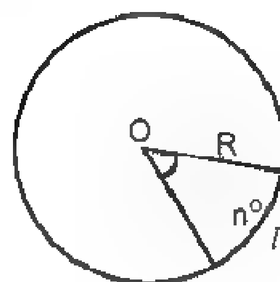
d) Điền vào bảng sau (đơn vị độ dài : cm) :

Đường tròn	(O_1)	(O_2)	(O_3)	(O_4)	(O_5)
Đường kính d					
Độ dài C của đường tròn					
$\frac{C}{d}$					

e) Nêu nhận xét.

2. Công thức tính độ dài cung tròn

?2 *Hãy điền biểu thức thích hợp vào các chỗ trống (...) trong dãy lập luận sau :*



Hình 51

Đường tròn bán kính R *(ứng với cung* 360°*) có độ dài là ....*

Vậy cung 1°, *bán kính* R *có độ dài là* $\frac{2\pi R}{360} = ...$

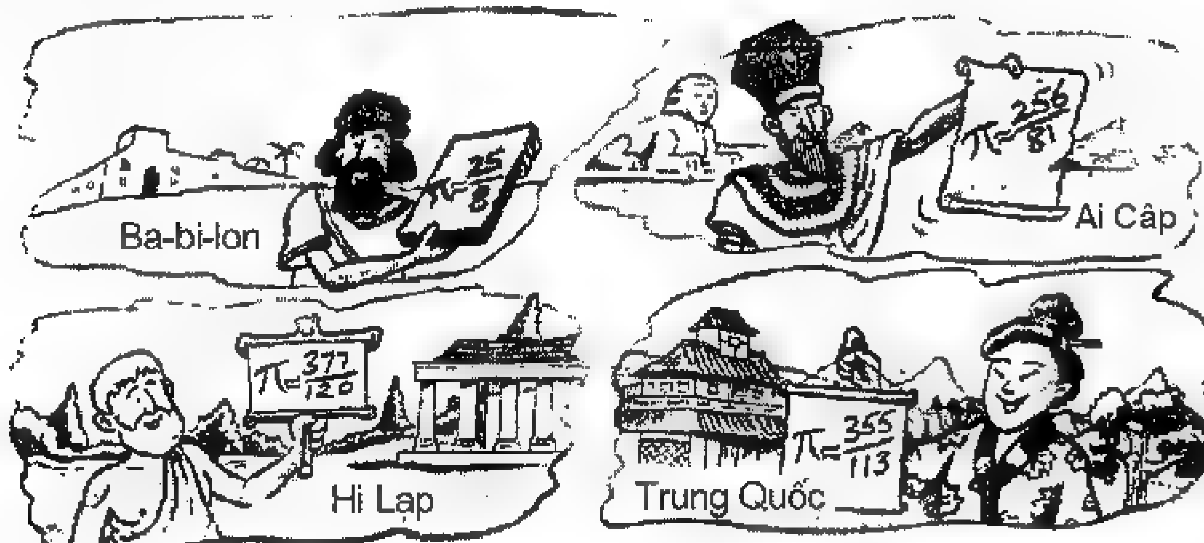
Suy ra cung n°, *bán kính* R *có độ dài là ...*

• *Trên đường tròn bán kính* R, *độ dài* l *của một cung* n° *(h.51) được tính theo công thức :*

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$



Có thể em chưa biết ?



Số π

• Từ mấy nghìn năm trước Công nguyên, con người đã thấy rằng giữa độ dài đường tròn và đường kính của nó có một cái gì đó ràng buộc, không đổi và qua nhiều lần kiểm nghiệm trong thực tế, người xưa đã thấy đường tròn dài gấp khoảng ba lần đường kính của nó.

Năm 1736, Ơ-le dùng π để biểu thị tỉ số giữa độ dài đường tròn C và đường kính d của nó :

$$\frac{C}{d} = \pi .$$

• Trải qua nhiều năm trong lịch sử, người ta đã mất nhiều công sức để tính giá trị gần đúng của π. Sau đây là một số ví dụ.

Người Ai Cập cổ đại cho rằng $\pi \approx 3,16$

Người La Mã lấy $\pi \approx 3,12$.

Người Ba-bi-lon lấy $\pi \approx 3\frac{1}{8} \approx 3,125$.

Ác-si-mét tính được $\pi \approx 3\frac{1}{7}$.

Trương Hành, người Trung Quốc ở thế kỉ II lấy $\pi \approx \sqrt{10} \approx 3,162$. Vào thế kỉ V, Tô Xung Chi lấy $\pi \approx 3,1415926$

Ở Việt Nam, các cụ ta dùng quy tắc "quân bát, phát tam, tồn ngũ, quân nhị", theo đó $\pi \approx \frac{16}{5} = 3,2$

Vào thế kỉ XVI, nhà toán học Đức Ru-đôn-phơ tính được số π với 35 chữ số thập phân và ông đề nghị khắc giá trị này lên mộ của ông

Năm 1767, Lăm-be (nhà toán học Đức) chứng minh được π là số vô tỉ.

Năm 1882, Lin-đơ-man (nhà toán học Đức) chứng minh được π là số siêu việt, nghĩa là nó không phải là nghiệm của một đa thức khác không với hệ số hữu tỉ

Năm 1973, ở Pháp, bằng máy tính điện tử, người ta đã tính gần đúng số π với một triệu chữ số thập phân. Năm 1989, cũng bằng máy tính điện tử, người ta đã tính được giá trị gần đúng của π với 4 tỉ chữ số thập phân

Bài tập

65. Lấy giá trị gần đúng của **π** là 3,14, hãy điền vào các ô trống trong bảng sau (đơn vị độ dài : cm, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai) .

Bán kính R của đường tròn	10		3			
Đường kính d của đường tròn		10		3		
Độ dài C của đường tròn					20	25,12

66. a) Tính độ dài cung 60° của một đường tròn có bán kính 2 dm.

b) Tính chu vi vành xe đạp có đường kính 650 mm.

67. Lấy giá trị gần đúng của π là 3,14, hãy điền vào ô trống trong bảng sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất và đến độ) :

Bán kính R của đường tròn	10 cm		21 cm	6,2 cm	
Số đo n° của cung tròn	90°	50°		41°	25°
Độ dài l của cung tròn		35,6 cm	20,8 cm		9,2 cm

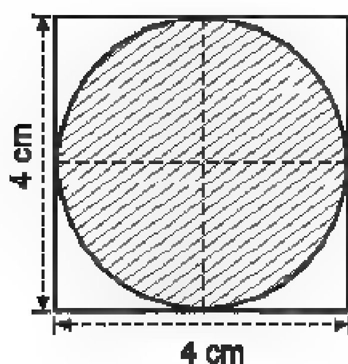
68. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng sao cho B nằm giữa A và C. Chứng minh rằng độ dài của nửa đường tròn đường kính AC bằng tổng các độ dài của hai nửa đường tròn đường kính AB và BC.



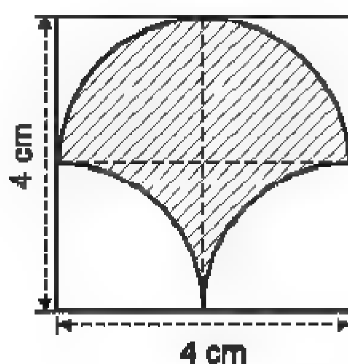
69. Máy kéo nông nghiệp có hai bánh sau to hơn hai bánh trước. Khi bơm căng, bánh xe sau có đường kính là 1,672 m và bánh xe trước có đường kính là 88 cm. Hỏi khi bánh xe sau lăn được 10 vòng thì bánh xe trước lăn được mấy vòng ?

Luyện tập

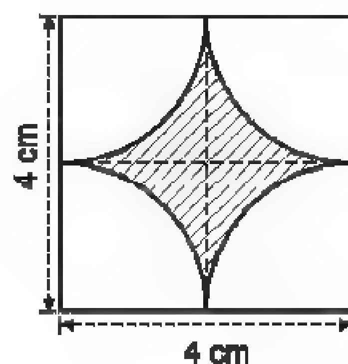
70. Vẽ lại ba hình (tạo bởi các cung tròn) dưới đây và tính chu vi mỗi hình (có gạch chéo) :



Hình 52

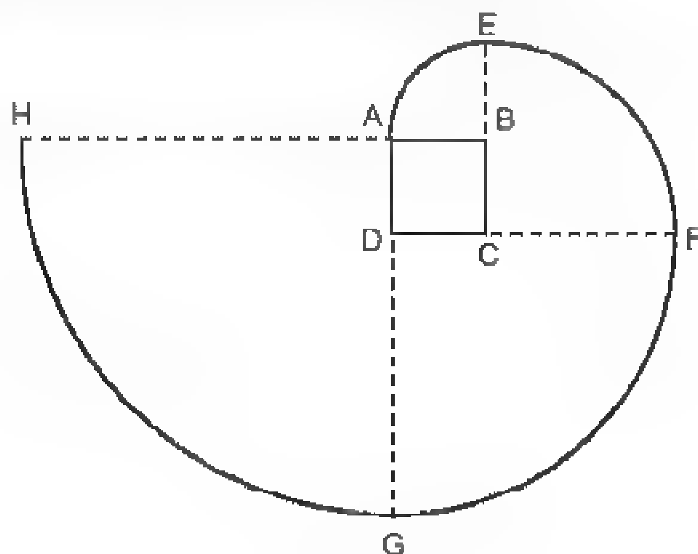


Hình 53



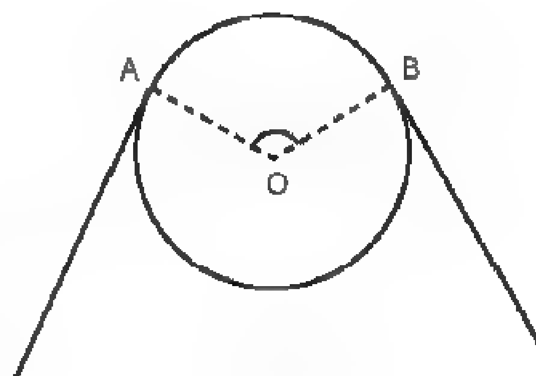
Hình 54

71. Vẽ lại hình tạo bởi các cung tròn dưới đây với tâm lần lượt là B, C, D, A theo đúng kích thước đã cho (cạnh hình vuông ABCD dài 1 cm). Nêu cách vẽ đường xoắn AEFGH. Tính độ dài đường xoắn đó.



Hình 55

72. Bánh xe của một ròng rọc có chu vi là 540 mm. Dây cua roa bao bánh xe theo cung AB có độ dài 200 mm. Tính góc AOB (h. 56).



Hình 56

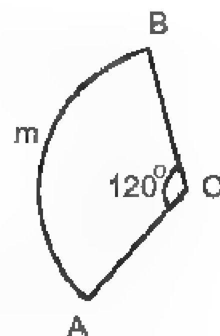
73. Đường tròn lớn của Trái Đất dài khoảng 40000 km. Tính bán kính Trái Đất.

74. Vĩ độ của Hà Nội là $20^\circ 01'$. Mỗi vòng kinh tuyến của Trái Đất dài khoảng 40 000 km Tính độ dài cung kinh tuyến từ Hà Nội đến xích đạo

75. Cho đường tròn (O), bán kính OM. Vẽ đường tròn tâm O', đường kính OM. Một bán kính OA của đường tròn (O) cắt đường tròn (O') ở B.

Chứng minh $\overset{\frown}{MA}$ và $\overset{\frown}{MB}$ có độ dài bằng nhau.

76. Xem hình 57 và so sánh độ dài của cung AmB với độ dài đường gấp khúc AOB.



Hình 57

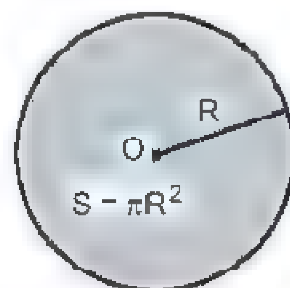
§10. Diện tích hình tròn, hình quạt tròn

Khi bán kính tăng gấp đôi thì diện tích hình tròn có tăng gấp đôi không ?

1. Công thức tính diện tích hình tròn

Diện tích S của một hình tròn bán kính R (h. 58) được tính theo công thức

$$S = \pi R^2.$$

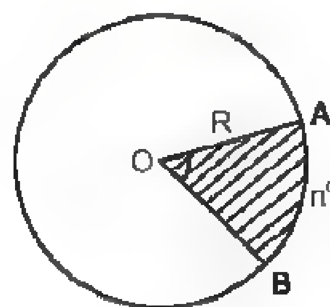


Hình 58

2. Cách tính diện tích hình quạt tròn

Hình quạt tròn là một phần hình tròn giới hạn bởi một cung tròn và hai bán kính đi qua hai mút của cung đó.

Ở hình 59, ta có hình quạt tròn OAB, tâm O, bán kính R, cung n°.



Hình 59

? *Hãy điền biểu thức thích hợp vào các chỗ trống (...) trong dãy lập luận sau :*

Hình tròn bán kính R (ứng với cung 360°) có diện tích là ... .

Vậy hình quạt tròn bán kính R, cung 1° có diện tích là ... .

Hình quạt tròn bán kính R, cung n° có diện tích S = ...

Biểu thức $\frac{\pi R^2 n}{360}$ còn có thể viết là $\frac{\pi R n}{180} \cdot \frac{R}{2}$, nhưng $\frac{\pi R n}{180}$ chính là độ dài l của cung n° của hình quạt tròn. Vậy $S = \frac{lR}{2}$.

Như vậy, diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n^o được tính theo công thức

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \text{ hay } S = \frac{lR}{2}$$

(l là độ dài cung n^o của hình quạt tròn).

Bài tập

77. Tính diện tích hình tròn nội tiếp một hình vuông có cạnh là 4 cm.

78. Chân một đống cát đổ trên một nền phẳng nằm ngang là một hình tròn có chu vi 12 m. Hỏi chân đống cát đó chiếm một diện tích là bao nhiêu mét vuông ?

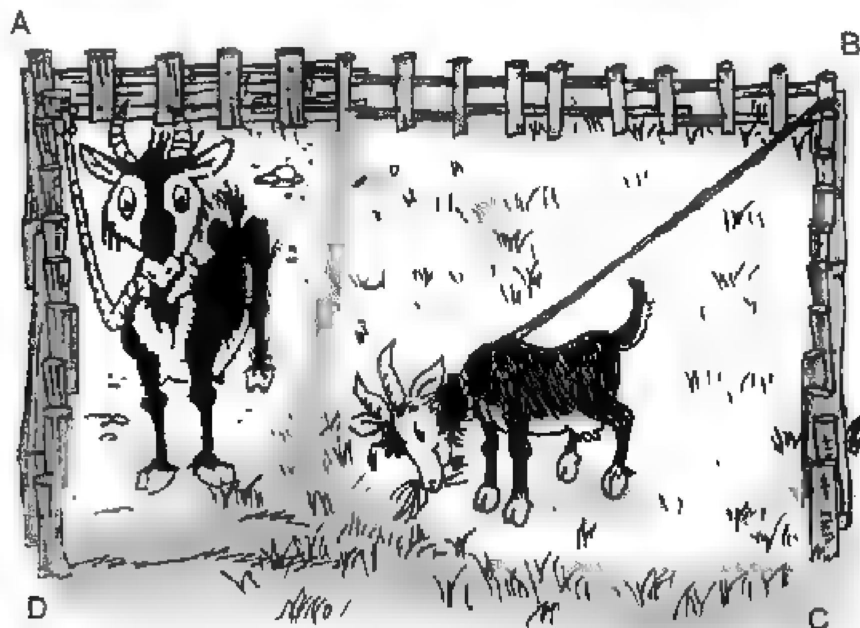
79. Tính diện tích một hình quạt tròn có bán kính 6 cm, số đo cung là 36^o.

80. Một vườn cỏ hình chữ nhật ABCD có AB = 40 m, AD = 30 m.

Người ta muốn buộc hai con dê ở hai góc vườn A, B. Có hai cách buộc :

- Mỗi dây thừng dài 20 m.
- Một dây thừng dài 30 m và dây thừng kia dài 10 m.

Hỏi với cách buộc nào thì diện tích cỏ mà cả hai con dê có thể ăn được sẽ lớn hơn (h. 60)?



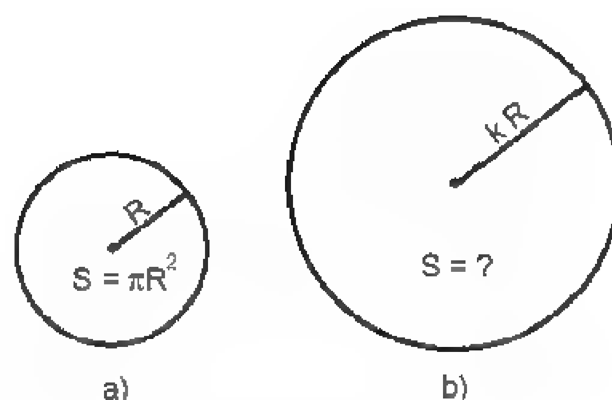
Hình 60

81. Diện tích hình tròn sẽ thay đổi thế nào nếu :

a) Bán kính tăng gấp đôi ?

b) Bán kính tăng gấp ba ?

c) Bán kính tăng k lần (k > 1) ?



Hình 61

82. Điền vào ô trống trong bảng sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất) :

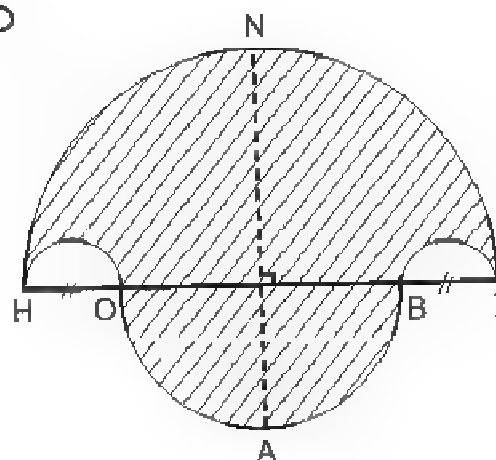
Bán kính đường tròn (R)	Độ dài đường tròn (C)	Diện tích hình tròn (S)	Số đo của cung tròn (n^o)	Diện tích hình quạt tròn cung n^o
	13,2 cm		$47,5^o$	
2,5 cm				12,50 cm^2
		37,80 cm^2		10,60 cm^2

Luyện tập

83. a) Vẽ hình 62 (tạo bởi các cung tròn) với HI   10 cm và HO   BI   2 cm. Nêu cách vẽ.

b) Tính diện tích hình HOABINH (miền gạch sọc).

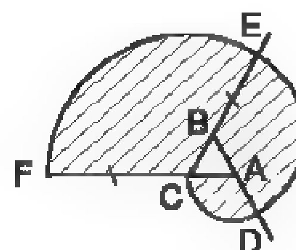
c) Chứng tỏ rằng hình tròn đường kính NA có cùng diện tích với hình HOABINH đó.



Hình 62

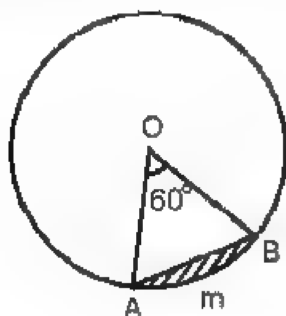
84. a) Vẽ lại hình tạo bởi các cung tròn xuất phát từ đỉnh C của tam giác đều ABC cạnh 1 cm. Nêu cách vẽ (h. 63).

b) Tính diện tích miền gạch sọc.

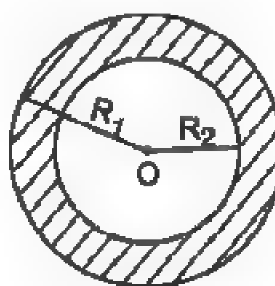


Hình 63

85. *Hình viên phân* là phần hình tròn giới hạn bởi một cung và dây căng cung ấy. Hãy tính diện tích hình viên phân AmB, biết góc ở tâm $\widehat{AOB} = 60^\circ$ và bán kính đường tròn là 5,1 cm (h. 64).



Hình 64



Hình 65

86. *Hình vành khăn* là phần hình tròn nằm giữa hai đường tròn đồng tâm (h. 65).

a) Tính diện tích S của hình vành khăn theo R_1 và R_2 (giả sử $R_1 > R_2$).

b) Tính diện tích hình vành khăn khi $R_1 = 10,5$ cm, $R_2 = 7,8$ cm.

87. Lấy cạnh BC của một tam giác đều làm đường kính, vẽ một nửa đường tròn về cùng một phía với tam giác ấy đối với đường thẳng BC. Cho biết cạnh BC = a, hãy tính diện tích của hai hình viên phân được tạo thành

Ôn tập chương III

Câu hỏi

1. Góc ở tâm là gì ?

2. Góc nội tiếp là gì ?

3. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung là gì ?

4. Tứ giác nội tiếp là gì ?

5. Với ba điểm A, B, C thuộc một đường tròn, khi nào thì

$$\text{sđ}\overset{\frown}{AB} = \text{sđ}\overset{\frown}{AC} + \text{sđ}\overset{\frown}{CB} \ ?$$

6. Phát biểu các định lí về mối quan hệ giữa cung nhỏ và dây căng cung đó trong một đường tròn.

7. Phát biểu định lí và hệ quả về các góc nội tiếp cùng chắn một cung.

8. Phát biểu định lí về góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung

9. Phát biểu quỹ tích cung chứa góc.

10. Phát biểu điều kiện để một tứ giác nội tiếp được đường tròn.

11. Phát biểu một số dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp.
12. Phát biểu định lí về đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp của đa giác đều.
13. Nêu cách tính số đo cung nhỏ, cung lớn.
14. Nêu cách tính số đo của góc nội tiếp theo số đo của cung bị chắn.
15. Nêu cách tính số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung theo số đo của cung bị chắn.
16. Nêu cách tính số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn theo số đo của các cung bị chắn.
17. Nêu cách tính số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn theo số đo của các cung bị chắn.
18. Nêu cách tính độ dài cung n^o của hình quạt tròn bán kính R
19. Nêu cách tính diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n^o.

Tóm tắt các kiến thức cần nhớ

Các định nghĩa

1. Góc ở tâm là góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn.
2. a) Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.

   b) Số đo của cung lớn bằng hiệu giữa 360^o và sô đo của cung nhỏ (có chung hai mút với cung lớn).

   c) Số đo của nửa đường tròn bằng 180^o .
3. Góc nội tiếp là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.
4. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung là góc có đỉnh tại tiếp điểm, một cạnh là tia tiếp tuyến và cạnh kia chứa dây cung.
5. Tứ giác nội tiếp đường tròn là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn.
6. Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác được gọi là đường tròn ngoại tiếp đa giác và đa giác được gọi là đa giác nội tiếp đường tròn.
7. Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác được gọi là đường tròn nội tiếp đa giác và đa giác được gọi là đa giác ngoại tiếp đường tròn.

Các định lí

1. Nếu C là điểm nằm trên cung AB thì sđ$\overset{\frown}{AB}$ = sđ$\overset{\frown}{AC}$ + sđ$\overset{\frown}{CB}$.

2. Với hai cung nhỏ trong một đường tròn, hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau và ngược lại.

3. Với hai cung nhỏ trong một đường tròn, cung lớn hơn cang dây lớn hơn và ngược lại.

4. Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.

5. Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy.

6. Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây cung (không phải là đường kính) thì chia cung cang dây ấy thành hai cung bằng nhau.

7. Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.

8. Số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.

9. Số đo của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.

10. Trong một đường tròn :

a) Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.

b) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.

c) Các góc nội tiếp chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.

d) Góc nội tiếp nhỏ hơn hoặc bằng 90° có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung

e) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông và ngược lại, góc vuông nội tiếp thì chắn nửa đường tròn

g) Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau

11. Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.

12. Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.

13. Quỹ tích (tập hợp) các điểm nhìn một đoạn thẳng cho trước dưới một góc α không đổi là hai cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng đó $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$.

14. Một tứ giác có tổng số đo hai góc đối nhau bằng 180° thì nội tiếp được đường tròn và ngược lại.

15. Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp :

a) Tứ giác có tổng hai góc đối nhau bằng 180°.

b) Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối của đỉnh đó

c) Tứ giác có bốn đỉnh cách đều một điểm (mà ta có thể xác định được). Điểm đó là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác.

d) Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α.

16. Hình thang nội tiếp được đường tròn là hình thang cân và ngược lại

17. Bất kì đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp, có một và chỉ một đường tròn nội tiếp.

18. Trên đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung n° được tính theo công thức

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

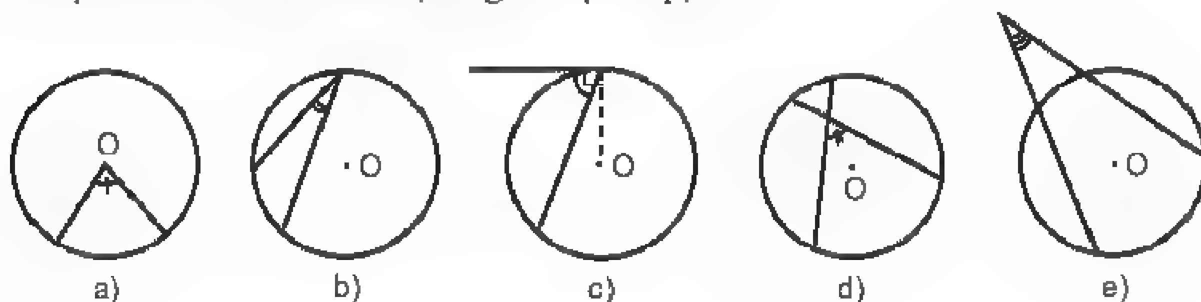
19. Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung n° được tính theo công thức

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \text{ hay } S = \frac{lR}{2}$$

(l là độ dài cung n° của hình quạt tròn).

Bài tập

88. Hãy nêu tên mỗi góc trong các hình dưới đây :
(*Ví dụ*. Góc trên hình 66b) là góc nội tiếp).



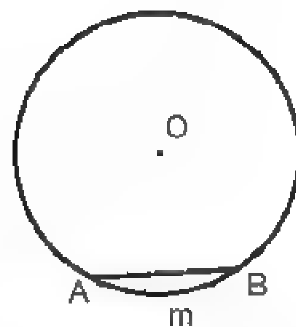
Hình 66

89. Trong hình 67, cung AmB có số đo là 60°. Hãy :

a) Vẽ góc ở tâm chắn cung AmB. Tính góc AOB.

b) Vẽ góc nội tiếp đỉnh C chắn cung AmB.
Tính góc ACB.

c) Vẽ góc tạo bởi tia tiếp tuyến Bt và dây cung BA
Tính góc ABt.



Hình 67

d) Vẽ góc ADB có đỉnh D ở bên trong đường tròn. So sánh $\widehat{ADB}$ với $\widehat{ACB}$.

e) Vẽ góc AEB có đỉnh E ở bên ngoài đường tròn (E và C cùng phía đối với AB). So sánh $\widehat{AEB}$ với $\widehat{ACB}$.

90. a) Vẽ hình vuông cạnh 4 cm.

b) Vẽ đường tròn ngoại tiếp hình vuông đó. Tính bán kính R của đường tròn này.

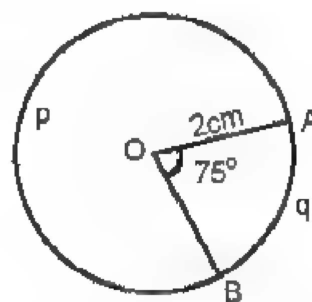
c) Vẽ đường tròn nội tiếp hình vuông đó. Tính bán kính r của đường tròn này.

91. Trong hình 68, đường tròn tâm O có bán kính R = 2 cm. $\widehat{AOB} = 75^{\circ}$.

a) Tính sđ $\overparen{ApB}$.

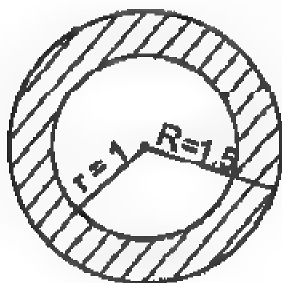
b) Tính độ dài hai cung AqB và ApB.

c) Tính diện tích hình quạt tròn OAqB.

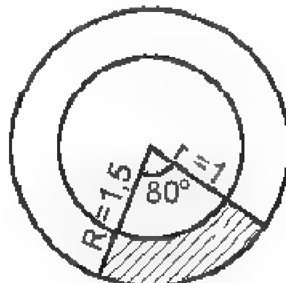


Hình 68

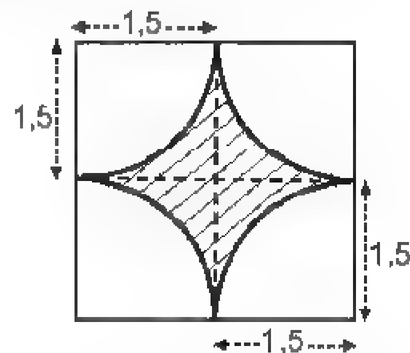
92. Hãy tính diện tích miền gạch sọc trong các hình 69, 70, 71 (đơn vị độ dài : cm).



Hình 69



Hình 70



Hình 71

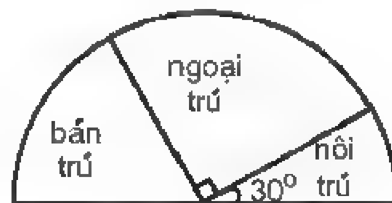
93. Có ba bánh xe răng cưa A, B, C cùng chuyển động ăn khớp với nhau Khi một bánh xe quay thì hai bánh xe còn lại cũng quay theo. Bánh xe A có 60 răng, bánh xe B có 40 rang, bánh xe C có 20 rang. Biết bán kính bánh xe C là 1 cm. Hỏi :

a) Khi bánh xe C quay 60 vòng thì bánh xe B quay mấy vòng ?

b) Khi bánh xe A quay 80 vòng thì bánh xe B quay mấy vòng ?

c) Bán kính của các bánh xe A và B là bao nhiêu ?

94. Hãy xem biểu đồ hình quạt biểu diễn sự phân phối học sinh của một trường THCS theo diện ngoại trú, bán trú, nội trú (h. 72). Hãy trả lời các câu hỏi sau :



Hình 72

a) Có phải $\frac{1}{2}$ số học sinh là học sinh ngoại trú không ?

b) Có phải $\frac{1}{3}$ số học sinh là học sinh bán trú không ?

c) Số học sinh nội trú chiếm bao nhiêu phần trăm ?

d) Tính số học sinh mỗi loại, biết tổng số học sinh là 1800 em.

95. Các đường cao hạ từ A và B của tam giác ABC cắt nhau tại H (góc C khác 90^o) và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt tại D và E. Chứng minh rằng :

a) CD = CE ; b) ΔBHD cân ; c) CD = CH.

96. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và tia phân giác của góc A cắt đường tròn tại M. Vẽ đường cao AH. Chứng minh rằng :

a) OM đi qua trung điểm của dây BC ;

b) AM là tia phân giác của góc OAH.

97. Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên AC lấy một điểm M và vẽ đường tròn đường kính MC. Kẻ BM cắt đường tròn tại D. Đường thẳng DA cắt đường tròn tại S. Chứng minh rằng :

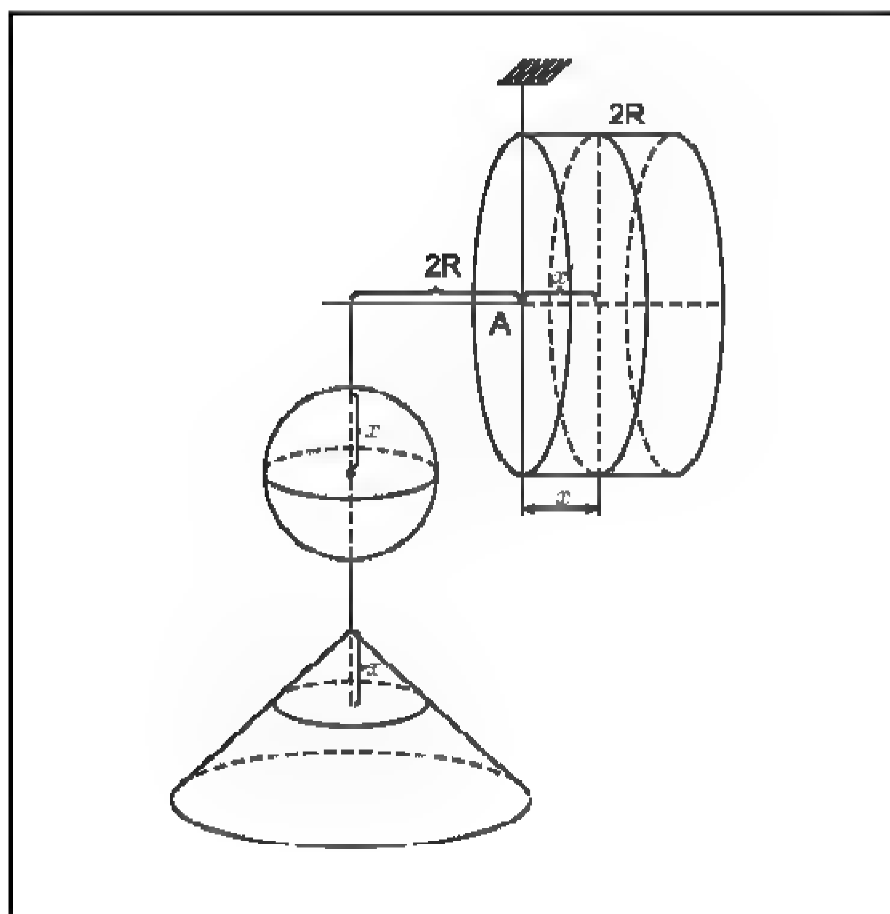
a) ABCD là một tứ giác nội tiếp ; b) $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$;

c) CA là tia phân giác của góc SCB.

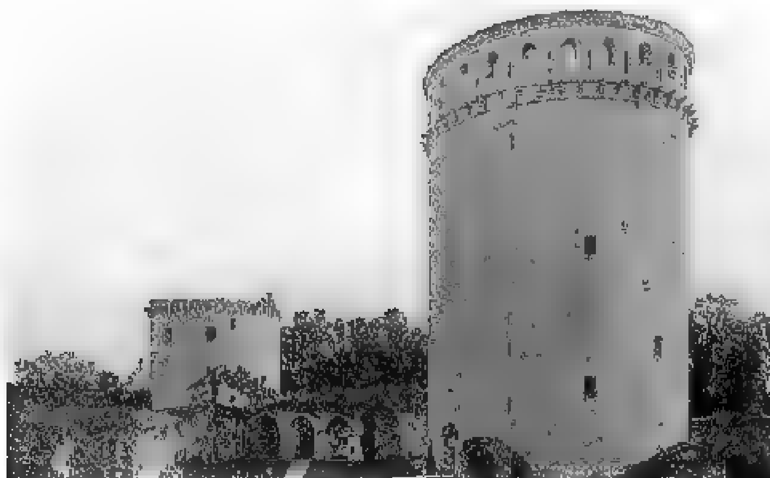
98. Cho đường tròn (O) và một điểm A cố định trên đường tròn. Tìm quỹ tích các trung điểm M của dây AB khi điểm B di động trên đường tròn đó.

99. Dựng ΔABC, biết BC = 6 cm, $\widehat{BAC} = 80^o$, đường cao AH có độ dài là 2 cm.

Chương IV – HÌNH TRỤ – HÌNH NÓN – HÌNH CẦU



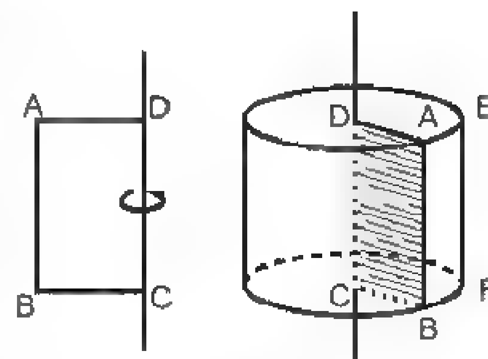
§1. Hình trụ – Diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ



Tháp tròn ở một lâu đài cổ cho ta hình ảnh hình trụ.

1. Hình trụ

Khi quay hình chữ nhật ABCD một vòng quanh cạnh CD cố định, ta được một hình trụ (h. 73). Khi đó :



Hình 73

• DA và CB quét nên *hai đáy của hình trụ*, là hai hình tròn bằng nhau nằm trong hai mặt phẳng song song, có tâm D và C.

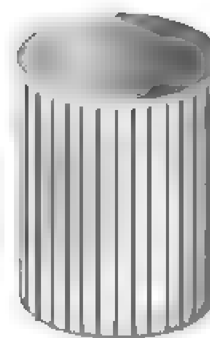
• Cạnh AB quét nên *mặt xung quanh* của hình trụ, mỗi vị trí của AB được gọi là một *đường sinh*. Chẳng hạn EF là một đường sinh.

• Các đường sinh của hình trụ vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Độ dài đường sinh là *chiều cao* của hình trụ.

• DC gọi là *trục* của hình trụ.

?1 *Lọ gốm ở hình 74 có dạng một hình trụ.*

Quan sát hình và cho biết đâu là đáy, đâu là mặt xung quanh, đâu là đường sinh của hình trụ đó ?

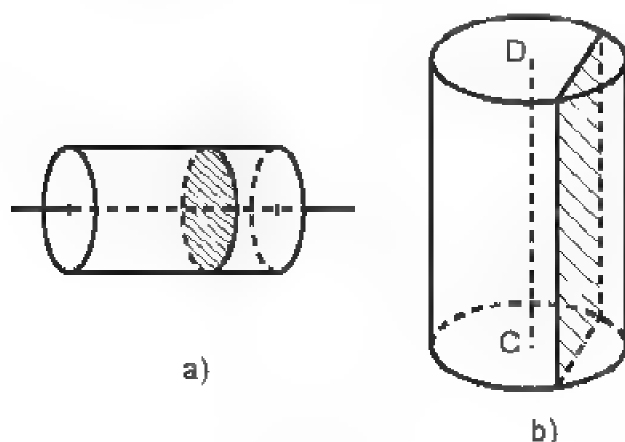


Hình 74

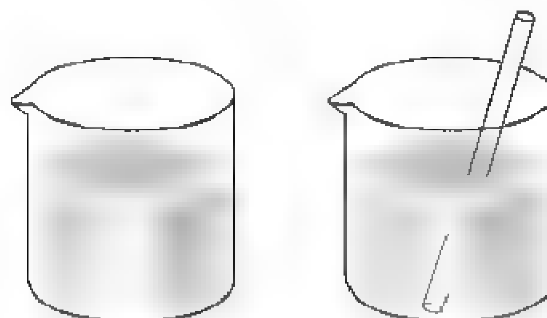
2. Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng

• Khi cắt hình trụ bởi một mặt phẳng *song song với đáy*, thì phần mặt phẳng nằm trong hình trụ (mặt cắt) là *một hình tròn bằng hình tròn đáy* (h. 75a).

• Khi cắt hình trụ bởi một mặt phẳng *song song với trục* DC thì mặt cắt là *một hình chữ nhật* (h. 75b).



Hình 75

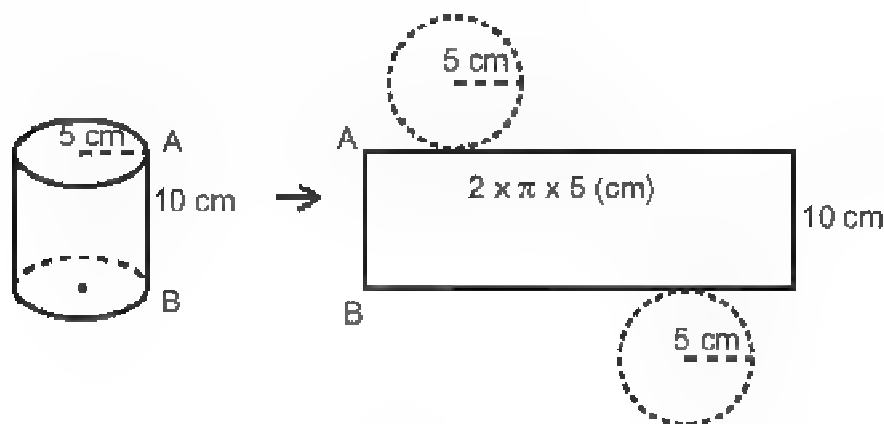


Hình 76

?2 *Chiếc cốc thuỷ tinh và ống nghiệm đều có dạng hình trụ (h. 76), phải chăng mặt nước trong cốc và mặt nước trong ống nghiệm là những hình tròn ?*

3. Diện tích xung quanh của hình trụ

Từ một hình trụ, cắt rời hai đáy và cắt dọc theo đường sinh AB của mặt xung quanh rồi trải phẳng ra, ta được hình khai triển mặt xung quanh của hình trụ là một hình chữ nhật có một cạnh bằng chu vi hình tròn đáy, cạnh còn lại bằng chiều cao của hình trụ.



Hình 77

?3 *Quan sát hình 77 và điền số thích hợp vào các ô trống :*

– Chiều dài của hình chữ nhật bằng chu vi của đáy hình trụ và bằng : □ (cm).

– Diện tích hình chữ nhật

$$\square \,.\, \square = \square \ (\text{cm}^2).$$

– Diện tích một đáy của hình trụ

$$\square \,.\, 5 \,.\, 5 = \square \ (\text{cm}^2).$$

Tổng diện tích hình chữ nhật và diện tích hai hình tròn đáy (diện tích toàn phần) của hình trụ

$$\square + \square \,.\, 2 = \square \ (\text{cm}^2).$$

Tổng quát, với hình trụ bán kính đáy r và chiều cao h, ta có :

• Diện tích xung quanh

$$\boxed{S_{xq} = 2\pi rh.}$$

• Diện tích toàn phần

$$\boxed{S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2.}$$

4. Thể tích hình trụ

Ở lớp dưới, ta đã biết công thức tính thể tích hình trụ :

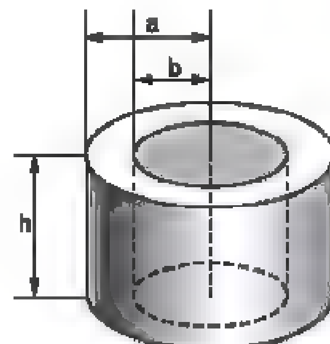
$$\boxed{V = Sh = \pi r^2 h}$$

(S là diện tích đáy, h là chiều cao).

Ví dụ. Các kích thước của một vòng bi cho trên hình 78. Hãy tính "thể tích" của vòng bi (phần giữa hai hình trụ).

Giải. Thể tích cần phải tính bằng hiệu các thể tích V_2, V_1 của hai hình trụ có cùng chiều cao h và bán kính các đường tròn đáy tương ứng là a, b. Ta có

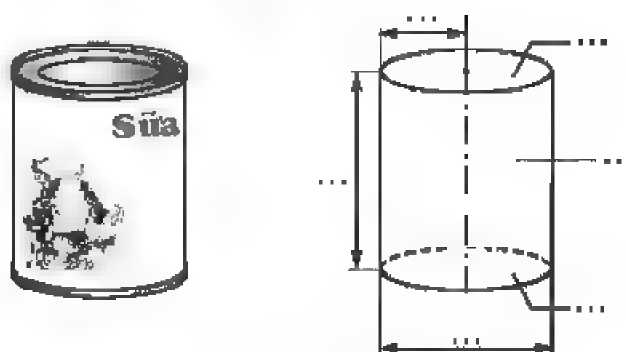
$$V = V_2 - V_1 = \pi a^2 h - \pi b^2 h$$
$$= \pi(a^2 - b^2)h.$$



Hình 78

Bài tập

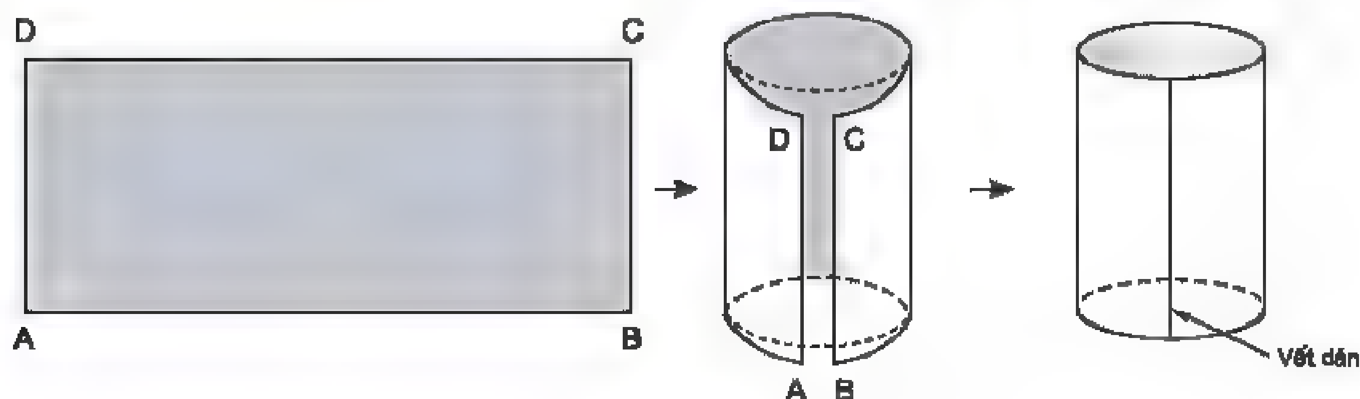
1. Hãy điền thêm các tên gọi vào dấu "..."



Hình 79

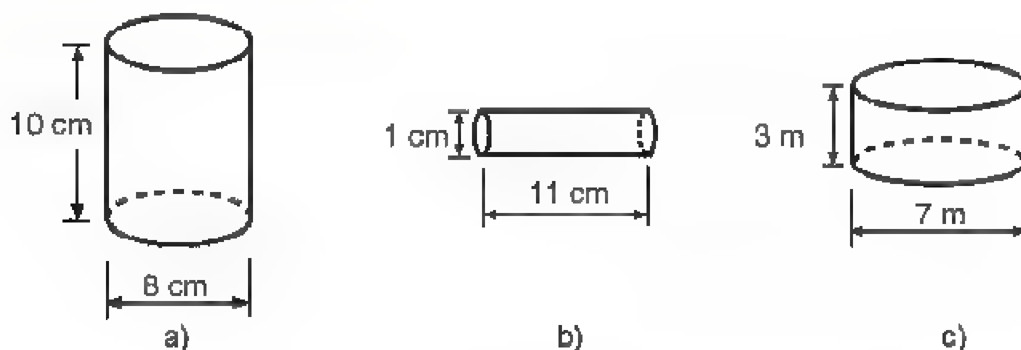
2. Lấy một băng giấy hình chữ nhật ABCD (h. 80). Biết AB = 10 cm, BC = 4 cm ; dán băng giấy như hình vẽ (B sát với A và C sát với D, không được xoắn)

Có thể dán băng giấy để tạo nên mặt xung quanh của hình trụ được không ?



Hình 80

3. Quan sát ba hình dưới đây và chỉ ra chiều cao, bán kính đáy của mỗi hình.



Hình 81

4. Một hình trụ có bán kính đáy là 7 cm, diện tích xung quanh bằng 352 cm^2. Khi đó, chiều cao của hình trụ là :

(A) 3,2 cm ; (B) 4,6 cm ; (C) 1,8 cm ;

(D) 2,1 cm ; (E) Một kết quả khác.

Hãy chọn kết quả đúng.

5. Điền đủ các kết quả vào những ô trống của bảng sau :

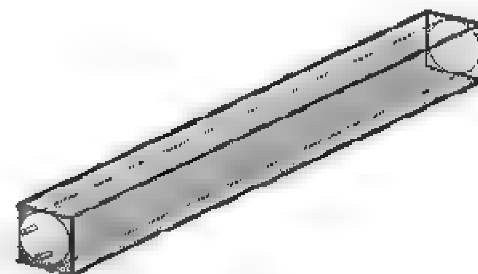
Hình	Bán kính đáy (cm)	Chiều cao (cm)	Chu vi đáy (cm)	Diện tích đáy (cm^2)	Diện tích xung quanh (cm^2)	Thể tích (cm^3)
	1	10				
	5	4				
		8	4π			

6. Chiều cao của một hình trụ bằng bán kính đường tròn đáy. Diện tích xung quanh của hình tru là 314 cm^2.

Hãy tính bán kính đường tròn đáy và thể tích hình trụ (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

7. Một bóng đèn huỳnh quang dài 1,2 m, đường kính của đường tròn đáy là 4 cm, được đặt khít vào một ống giấy cứng dạng hình hộp (h. 82). Tính diện tích phần giấy cứng dùng để làm một hộp.

(Hộp hở hai đầu, không tính lề và mép dán).



Hình 82

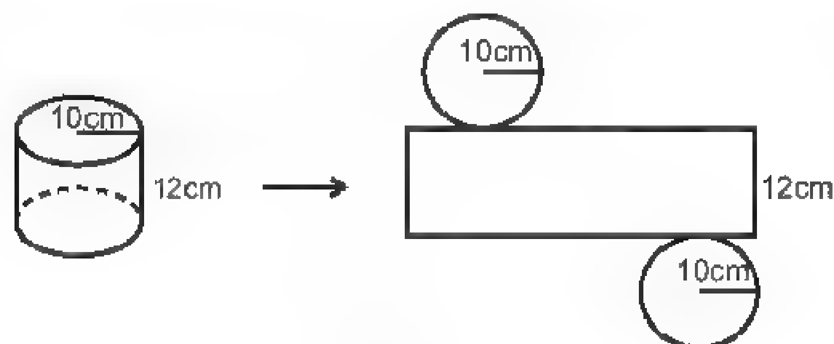
Luyện tập

8. Cho hình chữ nhật ABCD (AB – 2a, BC – a). Quay hình chữ nhật đó quanh AB thì được hình tru có thể tích V_1 ; quanh BC thì được hình tru có thể tích V_2 . Trong các đẳng thức dưới đây, hãy chọn đẳng thức đúng :

(A) $V_1 = V_2$; (B) $V_1 = 2V_2$; (C) $V_2 = 2V_1$;

(D) $V_2 - 3V_1$; (E) $V_1 - 3V_2$.

9. Hình 83 là một hình trụ cùng với hình khai triển của nó kèm theo kích thước.



Hình 83

Hãy điền vào các chỗ ... và các ô trống những cụm từ hoặc các số cần thiết.

. . . : $\square \, . \, \square \, . \, 10 = \square \, (cm^2)$;

. . . : $(2 \, . \, \square \, . \, 10) \, . \, \square = \square \, (cm^2)$;

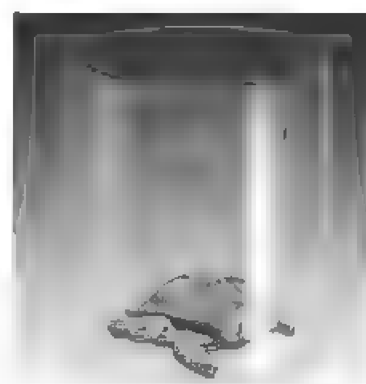
. . . : $\square \, . \, 2 + \square = \square \, (cm^2)$.

10. Hãy tính :

a) Diện tích xung quanh của một hình trụ có chu vi hình tròn đáy là 13 cm và chiều cao là 3 cm.

b) Thể tích của hình trụ có bán kính đường tròn đáy là 5 mm và chiều cao là 8 mm.

11. Người ta nhấn chìm hoàn toàn một tượng đá nhỏ vào một lọ thuỷ tinh có nước dạng hình trụ (h. 84). Diện tích đáy lọ thuỷ tinh là $12,8 \text{ cm}^2$. Nước trong lọ dâng lên thêm 8,5 mm. Hỏi thể tích của tượng đá là bao nhiêu ?

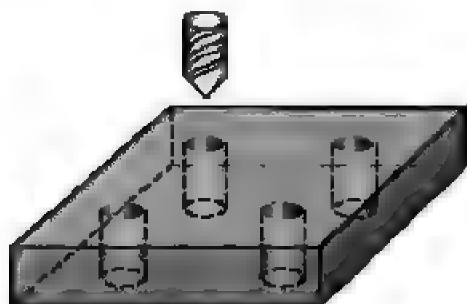


Hình 84

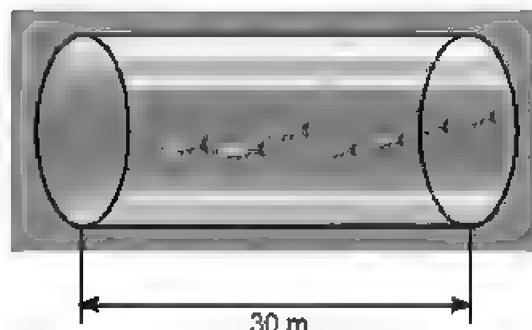
12. Điền đủ các kết quả vào những ô trống của bảng sau :

Hình	Bán kính đáy	Đường kính đáy	Chiều cao	Chu vi đáy	Diện tích đáy	Diện tích xung quanh	Thể tích
	25 mm		7 cm				
		6 cm	1 m				
	5 cm						1 *l*

13. Một tấm kim loại được khoan thủng bốn lỗ như hình 85 (lỗ khoan dạng hình trụ), tấm kim loại dày 2 cm, đáy của nó là hình vuông có cạnh là 5 cm. Đường kính của mũi khoan là 8 mm. Hỏi thể tích phần còn lại của tấm kim loại là bao nhiêu ?



Hình 85

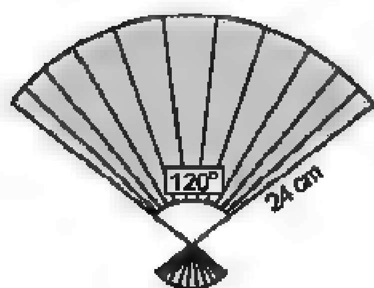


Hình 86

14. Đường ống nối hai bể cá trong một thuỷ cung ở miền nam nước Pháp có dạng một hình trụ, độ dài của đường ống là 30 m (h. 86). Dung tích của đường ống nói trên là 1 800 000 lít.

Tính diện tích đáy của đường ống.

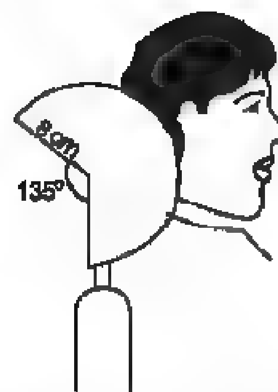
§2. Hình nón – Hình nón cụt – Diện tích xung quanh và thể tích của hình nón, hình nón cụt



Cái quạt



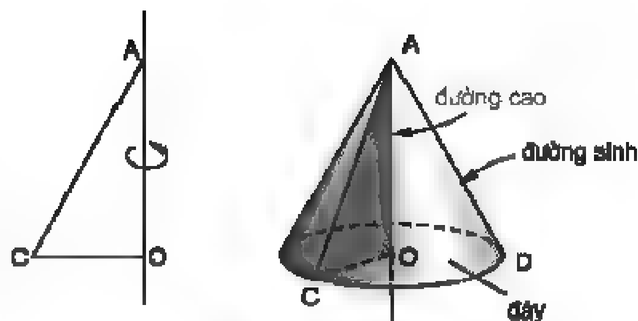
Hoa tai



Gối tựa đầu (của ghế trên ô tô)

1. Hình nón

Khi quay tam giác vuông AOC một vòng quanh cạnh góc vuông OA cố định thì được một hình nón (h. 87). Khi đó :



Hình 87

- Cạnh OC quét nên *đáy của hình nón*, là một hình tròn tâm O.

- Cạnh AC quét nên *mặt xung quanh* của hình nón, mỗi vị trí của AC được gọi là *một đường sinh*. Chẳng hạn AD là một đường sinh.

- A gọi là *đỉnh* và AO gọi là *đường cao* của hình nón.

?1 *Chiếc nón (h. 88) có dạng mặt xung quanh của một hình nón. Quan sát hình và cho biết, đâu là đường tròn đáy, đâu là mặt xung quanh, đâu là đường sinh của hình nón.*



Hình 88

2. Diện tích xung quanh hình nón

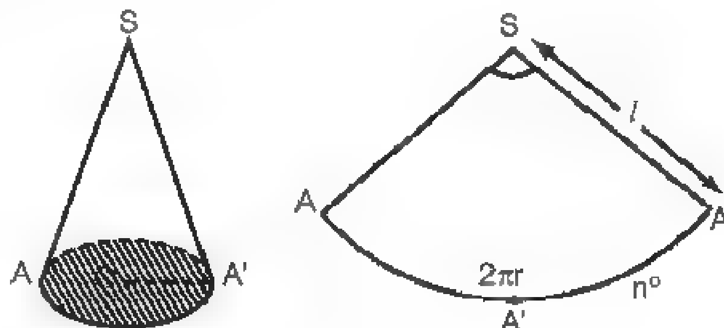
Cắt mặt xung quanh của một hình nón dọc theo một đường sinh của nó rồi trải phẳng ra, ta được hình khai triển là một hình quạt tròn có tâm là đỉnh hình nón, bán kính bằng độ dài đường sinh và độ dài cung bằng độ dài đường tròn đáy của hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón bằng diện tích của hình quạt tròn khai triển (h. 89).

Gọi bán kính đáy của hình nón là r, đường sinh là l.

Theo công thức tính độ dài cung, ta có :

Độ dài của cung hình quạt tròn là

$$\frac{\pi l n}{180}.$$



Hình 89

Độ dài đường tròn đáy của hình nón là $2\pi r$.

Từ đó ta có $\quad \dfrac{\pi l n}{180} = 2\pi r.$

Suy ra $\quad r = \dfrac{l n}{360}.$

Diện tích xung quanh của hình nón bằng diện tích hình quạt tròn khai triển nên

$$S_{xq} = \frac{\pi l^2 n}{360} = \pi l \cdot \frac{l n}{360} = \pi r l.$$

Từ các kết quả trên ta có :

• Diện tích xung quanh của hình nón là

$$\boxed{S_{xq} = \pi r l.}$$

• Diện tích toàn phần của hình nón (tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy) là

$$\boxed{S_{tp} = \pi r l + \pi r^2.}$$

Ví dụ. Tính diện tích xung quanh của một hình nón có chiều cao h = 16 cm và bán kính đường tròn đáy r = 12 cm.

Giải

Độ dài đường sinh của hình nón :

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{400} = 20 \text{ (cm)}.$$

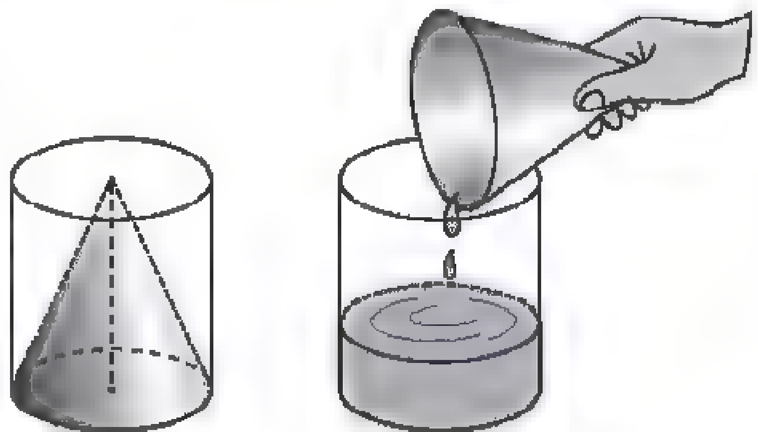
Diện tích xung quanh của hình nón :

$$S_{xq} = \pi r l = \pi . 12 . 20 = 240\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Đáp số : 240π cm^2.

3. Thể tích hình nón

Có hai dụng cụ, một hình trụ và một hình nón có đáy là hai hình tròn bằng nhau. Chiều cao của hình nón bằng chiều cao của hình trụ (h. 90).



Hình 90

Nếu ta dùng dung cụ có dạng như hình nón nói

trên, múc đầy nước rồi đổ hết vào dụng cụ hình trụ thì thấy chiều cao của cột nước này chỉ bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của hình trụ.

Qua thực nghiệm, ta thấy $V_{nón} = \frac{1}{3}.V_{trụ}$.

Ta có thể tích hình nón là $$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

4. Hình nón cụt



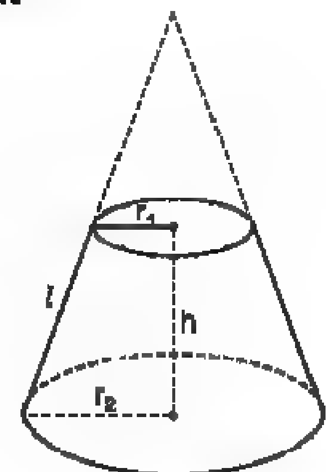
Hình 91. Đèn treo ở trần nhà khi bật sáng sẽ tạo nên một "cột sáng" có dạng một hình nón cụt

Khi cắt hình nón bởi một *mặt phẳng song song với đáy* thì phần mặt phẳng nằm trong hình nón là *một hình tròn*. Phần hình nón nằm giữa mặt phẳng nói trên và mặt đáy được gọi là một *hình nón cụt* (h. 92).

5. Diện tích xung quanh và thể tích hình nón cụt

Cho hình nón cụt có r_1, r_2 là các bán kính đáy, l là độ dài đường sinh, h là chiều cao (h. 92).

Kí hiệu S_{xq} là diện tích xung quanh và V là thể tích hình nón cụt.



Hình 92

Quan sát hình 92, ta nhận thấy S_{xq} là hiệu diện tích xung quanh của hình nón lớn và hình nón nhỏ, V cũng là hiệu thể tích của hình nón lớn và hình nón nhỏ

Ta có các công thức sau :

$$S_{xq} = \pi(r_1 + r_2)l.$$

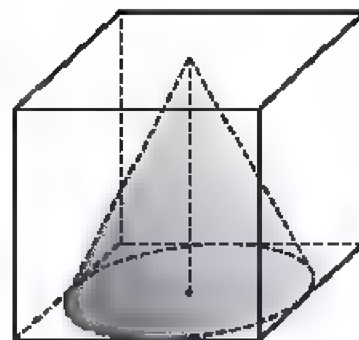
$$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2).$$

Bài tập

15. Một hình nón được đặt vào bên trong một hình lập phương như hình vẽ (cạnh của hình lập phương bằng 1) (h. 93). Hãy tính :

a) Bán kính đáy của hình nón.

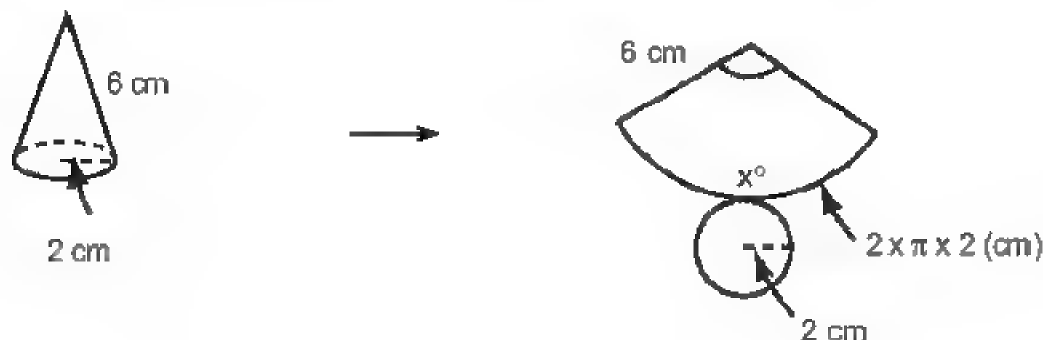
b) Độ dài đường sinh.



Hình 93

16. Cắt mặt xung quanh của một hình nón theo một đường sinh và trải phẳng ra thành một hình quạt. Biết bán kính hình quạt tròn bằng độ dài đường sinh và độ dài cung bằng chu vi đáy.

Quan sát hình 94 và tính số đo cung của hình quạt tròn.



Hình 94

17. Khi quay tam giác vuông để tạo ra một hình nón như ở hình 87 thì góc CAO gọi là *nửa góc ở đỉnh* của hình nón. Biết nửa góc ở đỉnh của một hình nón là 30^o, độ dài đường sinh là a. Tính số đo cung của hình quạt khi khai triển mặt xung quanh của hình nón.

18. Hình ABCD (h. 95) khi quay quanh BC thì tạo ra .

(A) Một hình trụ ;

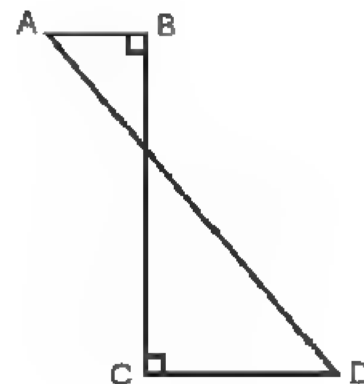
(B) Một hình nón ;

(C) Một hình nón cụt ;

(D) Hai hình nón ;

(E) Hai hình trụ.

Hãy chọn câu trả lời đúng.



Hình 95

19. Hình khai triển của mặt xung quanh của một hình nón là một hình quạt. Nếu bán kính hình quạt là 16 cm, số đo cung là 120^0 thì độ dài đường sinh của hình nón là .

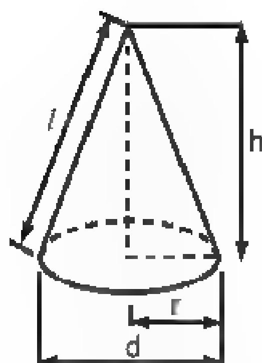
(A) 16 cm ;　　(B) 8 cm ;　　(C) $\frac{16}{3}$ cm ;

(D) 4 cm ;　　(E) $\frac{16}{5}$ cm.

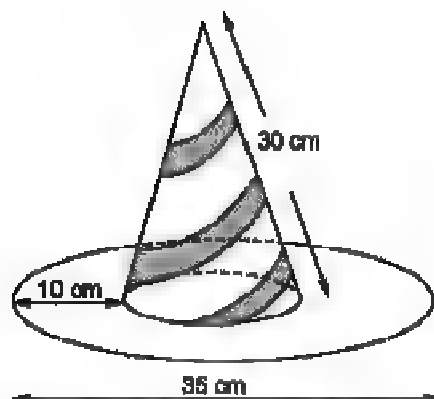
Hãy chọn kết quả đúng.

20. Hãy điền đủ vào các ô trống ở bảng sau (xem hình 96) :

Bán kính đáy r (cm)	Đường kính đáy d (cm)	Chiều cao h (cm)	Độ dài đường sinh l (cm)	Thể tích V (cm^3)
10		10		
	10	10		
		10		1000
10				1000
	10			1000



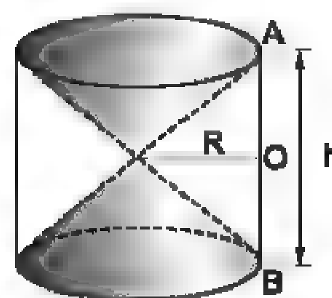
Hình 96



Hình 97

21. Cái mũ của chú hề với các kích thước cho theo hình vẽ (h. 97). Hãy tính tổng diện tích vải cần có để làm nên cái mũ (không kể riềm, mép, phần thừa).

22. Hình 98 cho ta hình ảnh của một cái đồng hồ cát với các kích thước kèm theo (AO = OB).

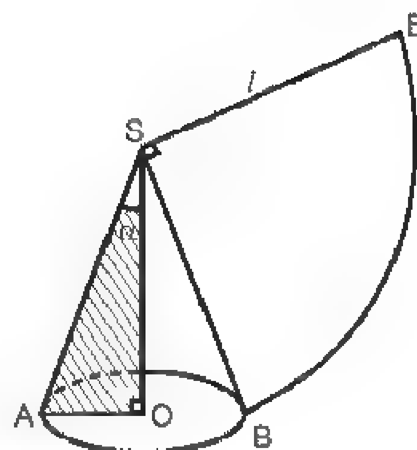


Hình 98

Hãy so sánh tổng các thể tích của hai hình nón và thể tích của hình trụ.

Luyện tập

23. Viết công thức tính *nửa góc ở đỉnh* của một hình nón (góc α của tam giác vuông AOS – hình 99) sao cho diện tích mặt khai triển của mặt nón bằng một phần tư diện tích của hình tròn (bán kính SA).



Hình 99

24. Hình khai triển của mặt xung quanh của một hình nón là một hình quạt, bán kính hình quạt đó là 16 cm, số đo cung là 120^o. Tang của nửa góc ở đỉnh của hình nón là :

(A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (C) $\sqrt{2}$; (D) $2\sqrt{2}$.

Hãy chọn kết quả đúng.

25. Hãy tính diện tích xung quanh của hình nón cụt biết hai bán kính đáy là a, b (a < b) và độ dài đường sinh là l (a, b, l có cùng đơn vị đo).

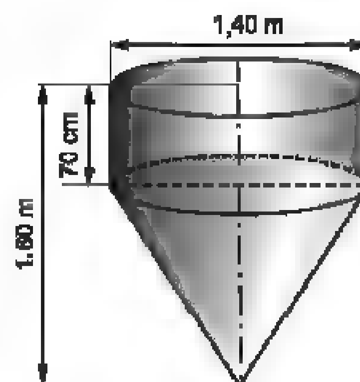
26. Hãy điền đủ vào các ô trống cho ở bảng sau (đơn vị độ dài : cm) :

Hình	Bán kính đáy (r)	Đường kính đáy (d)	Chiều cao (h)	Độ dài đường sinh (l)	Thể tích (V)
(hình nón)	5		12		
		16	15		
	7			25	
		40		29	

27. Một dụng cụ gồm một phần có dạng hình trụ, phần còn lại có dạng hình nón. Các kích thước cho trên hình 100. Hãy tính :

a) Thể tích của dụng cụ này ;

b) Diện tích mặt ngoài của dụng cụ (không tính nắp đậy).

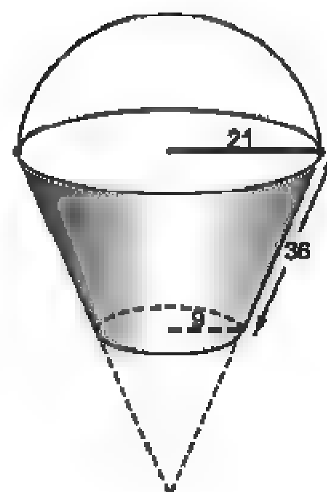


Hình 100

28. Một cái xô bằng inốc có dạng hình nón cụt đựng hoá chất, có các kích thước cho ở hình 101 (đơn vị : cm).

a) Hãy tính diện tích xung quanh của xô.

b) Khi xô chứa đầy hoá chất thì dung tích của nó là bao nhiêu ?

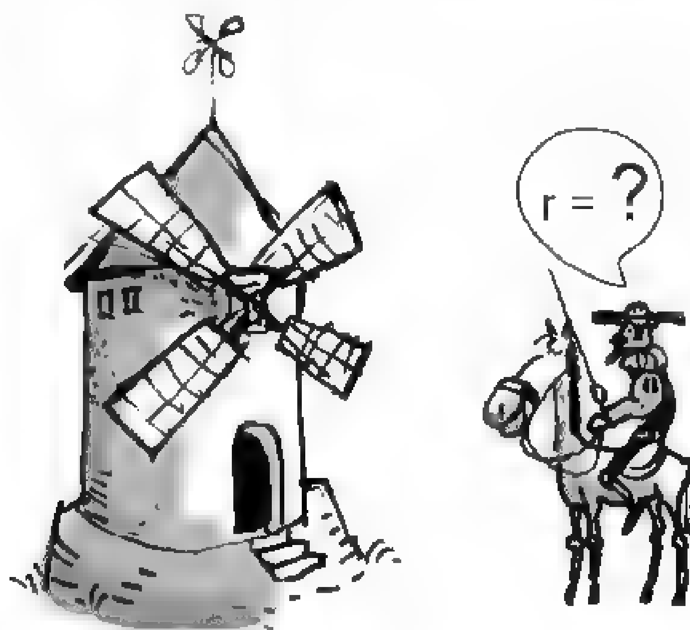


Hình 101

29. *Cối xay gió của Đôn-ki-hô-tê (từ tác phẩm của Xéc-van-téc (Cervantès))*

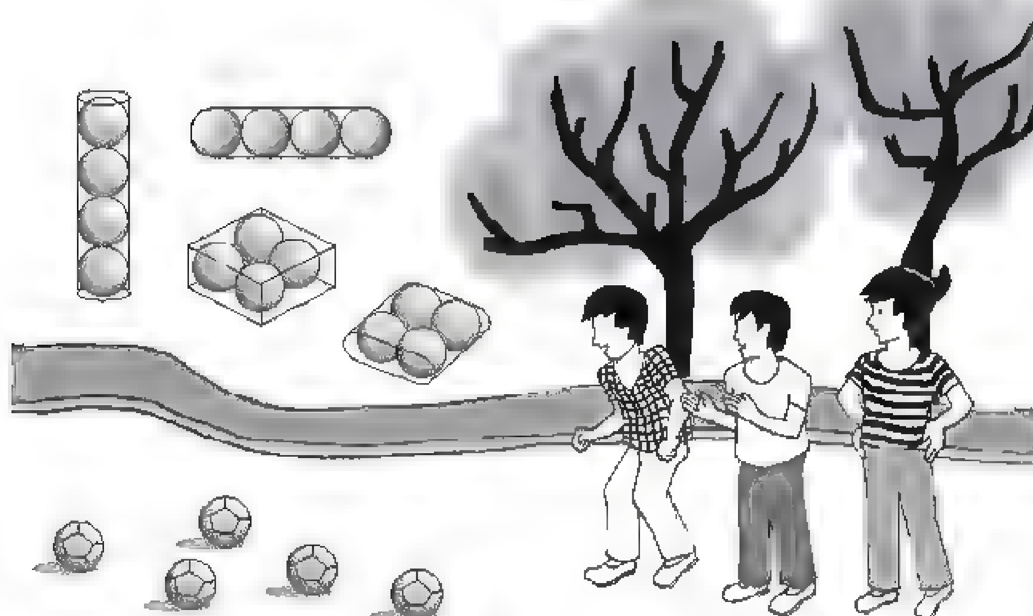
Phần trên của cối xay gió có dạng một hình nón (h. 102). Chiều cao của hình nón là 42 cm và thể tích của nó là 17 600 cm^3.

Em hãy giúp chàng Đôn ki hô tê tính bán kính đáy của hình nón (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



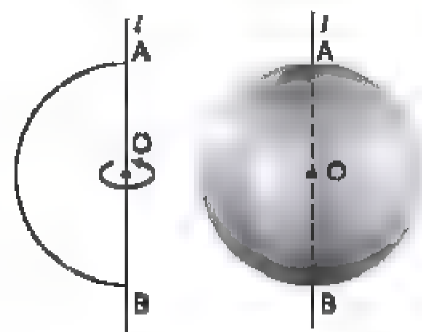
Hình 102

§3. Hình cầu.
Diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu



1. Hình cầu

Khi quay nửa hình tròn tâm O, bán kính R một vòng quanh đường kính AB cố định thì được một hình cầu (h. 103).



Hình 103

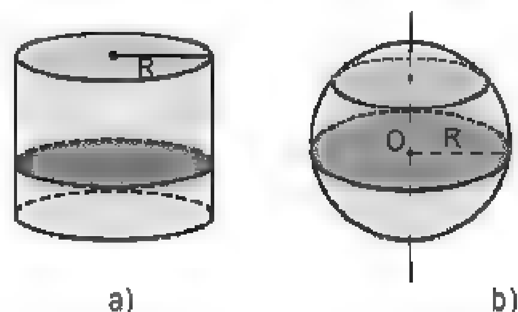
• Nửa đường tròn trong phép quay nói trên tạo nên *mặt cầu*.

• Điểm O được gọi là *tâm*, R là *bán kính* của hình cầu hay mặt cầu đó.

2. Cắt hình cầu bởi một mặt phẳng

Khi cắt hình cầu bởi một mặt phẳng thì phần mặt phẳng nằm trong hình đó (mặt cắt) là một hình tròn

?1 *Cắt một hình trụ hoặc một hình cầu bởi mặt phẳng vuông góc với trục, ta được hình gì ? Hãy điền vào bảng (chỉ với các từ "có", "không")* (h. 104).



Hình 104

Mặt cắt \ Hình	Hình trụ	Hình cầu
Hình chữ nhật		
Hình tròn bán kính R		
Hình tròn bán kính nhỏ hơn R		

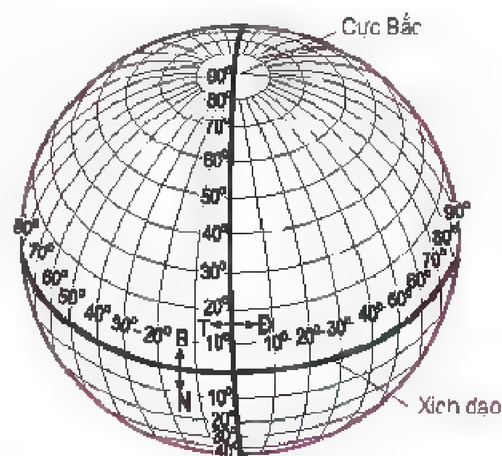
Quan sát hình 104, ta thấy :

• Khi cắt hình cầu bán kính R bởi một mặt phẳng, ta được một hình tròn.

• Khi cắt mặt cầu bán kính R bởi một mặt phẳng, ta được một đường tròn :

– Đường tròn đó có bán kính R nếu mặt phẳng đi qua tâm *(gọi là đường tròn lớn)*.

– Đường tròn đó có bán kính bé hơn R nếu mặt phẳng không đi qua tâm.



Hình 105

Ví dụ. Trái Đất được xem như một hình cầu (h. 105), xích đạo là một đường tròn lớn.

3. Diện tích mặt cầu

Ở lớp dưới, ta đã biết công thức tính diện tích mặt cầu

$$S = 4\pi R^2 \text{ hay } S = \pi d^2$$

(R là bán kính, d là đường kính của mặt cầu)

Ví dụ. Diện tích một mặt cầu là 36 cm^2. Tính đường kính của một mặt cầu thứ hai có diện tích gấp ba lần diện tích mặt cầu này.

Giải. Gọi d là độ dài đường kính của mặt cầu thứ hai, ta có

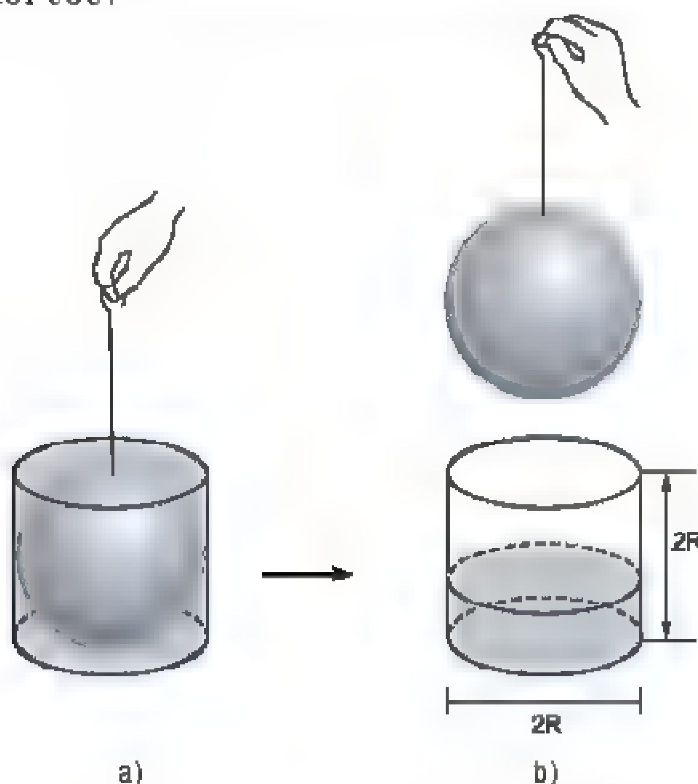
$$\pi d^2 = 3.36 = 108. \text{ Suy ra } \quad d^2 \approx \frac{108}{3,14} \approx 34,39.$$

Vậy d ≈ 5,86 cm.

4. Thể tích hình cầu

Một hình cầu có bán kính R và một cốc thuỷ tinh dạng hình trụ có các kích thước như hình 106.

Ở hình 106a, hình cầu nằm khít trong hình trụ có đầy nước. Ta nhấc nhẹ hình cầu ra khỏi cốc.



Hình 106

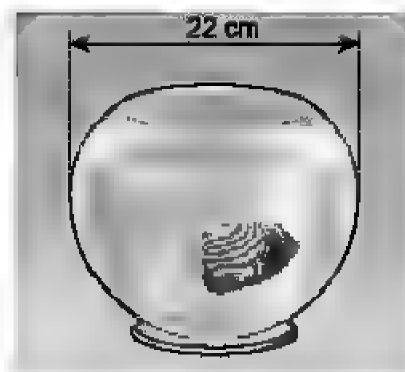
Đo độ cao cột nước còn lại ở hình 106b, ta thấy độ cao này chỉ bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của hình trụ. Do đó, thể tích hình cầu bằng $\frac{2}{3}$ thể tích hình trụ, hay

$$V = \frac{2}{3}.2\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Ta có công thức tính thể tích hình cầu bán kính R là

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3.}$$

Ví dụ. Cần phải có ít nhất bao nhiêu lít nước để thay nước ở liễn nuôi cá cảnh (xem hình 107) ? Liễn được xem như một phần mặt cầu. Lượng nước đổ vào liễn chiếm $\frac{2}{3}$ thể tích của hình cầu.



Hình 107

Giải. Thể tích hình cầu được tính theo công thức

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ hay } V = \frac{1}{6}\pi d^3 \text{ (d là đường kính).}$$

(22 cm = 2,2 dm).

Lượng nước ít nhất cần phải có là

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot (2,2)^3 \approx 3,71 \text{ (dm}^3\text{)} = 3,71 \text{ (lít)}.$$

Bài tập

30. Nếu thể tích của một hình cầu là $113\frac{1}{7}$ cm^3 thì trong các kết quả sau đây, kết quả nào là bán kính của nó $\left(\text{lấy } \pi \approx \frac{22}{7}\right)$?

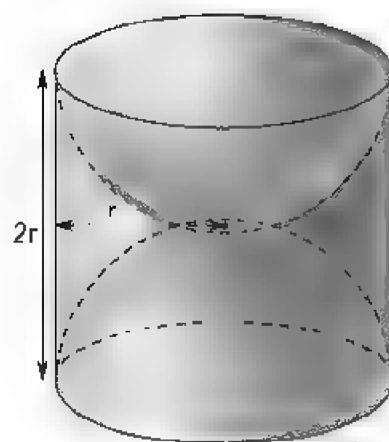
(A) 2 cm ; (B) 3 cm ; (C) 5 cm ; (D) 6 cm ;

(E) Một kết quả khác.

31. Hãy điền vào các ô trống ở bảng sau :

Bán kính hình cầu	0,3 mm	6,21 dm	0,283 m	100 km	6 hm	50 dam
Diện tích mặt cầu						
Thể tích hình cầu						

32. Một khối gỗ dạng hình trụ, bán kính đường tròn đáy là r, chiều cao 2r (đơn vị : cm). Người ta khoét rỗng hai nửa hình cầu như hình 108. Hãy tính diện tích bề mặt của khối gỗ còn lại (diện tích cả ngoài lẫn trong).



Hình 108

33. *Dụng cụ thể thao*

Các loại bóng cho trong bảng đều có dạng hình cầu. Hãy điền vào các ô trống ở bảng sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai) :

Loại bóng	Quả bóng gôn	Quả khúc côn cầu	Quả ten-nít	Quả bóng bàn	Quả bi-a
Đường kính	42,7 mm		6,5 cm	40 mm	61 mm
Độ dài đường tròn lớn		23 cm			
Diện tích					
Thể tích					

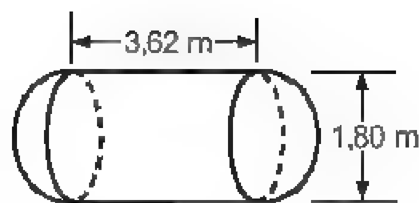
34. *Khinh khí cầu của nhà Mông gôn fi ê (Montgolfier)*

Ngày 4 – 6 – 1783, anh em nhà Mông-gôn-fi-ê (người Pháp) phát minh ra khinh khí cầu dùng không khí nóng. Coi khinh khí cầu này là hình cầu có đường kính 11 m. Hãy tính diện tích mặt khinh khí cầu đó (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Hình 109

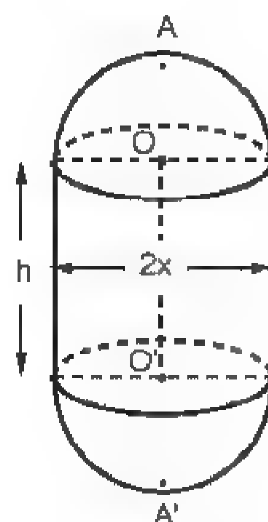
Luyện tập



Hình 110

35. Một cái bồn chứa xăng gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ (h. 110).

Hãy tính thể tích của bồn chứa theo các kích thước cho trên hình vẽ.



Hình 111

36. Một chi tiết máy gồm một hình trụ và hai nửa hình cầu với các kích thước đã cho trên hình 111 (đơn vị : cm).

a) Tìm một hệ thức giữa x và h khi AA' có độ dài không đổi và bằng 2a

b) Với điều kiện ở a), hãy tính diện tích bề mặt và thể tích của chi tiết máy theo x và a.

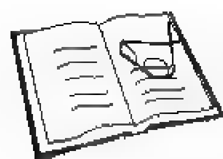
37. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R, Ax và By là hai tiếp tuyến với nửa đường tròn tại A và B. Lấy trên tia Ax điểm M rồi vẽ tiếp tuyến MP cắt By tại N.

a) Chứng minh rằng MON và APB là hai tam giác vuông đồng dạng.

b) Chứng minh $AM.BN = R^2$.

c) Tính tỉ số $\dfrac{S_{MON}}{S_{APB}}$ khi $AM = \dfrac{R}{2}$.

d) Tính thể tích của hình do nửa hình tròn APB quay quanh AB sinh ra.



Bài đọc thêm

VỊ TRÍ CỦA MỘT ĐIỂM TRÊN MẶT CẦU – TOẠ ĐỘ ĐỊA LÍ

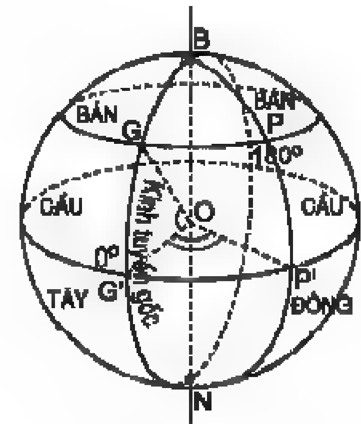
Quan sát hình 112, 113.

• Mỗi đường tròn là giao của mặt cầu và mặt phẳng vuông góc với đường thẳng NB gọi là một *vĩ tuyến*.

• Xích đạo là vĩ tuyến lớn nhất chia bề mặt Trái Đất (Địa cầu) ra hai nửa bằng nhau. Nửa cầu có cực bắc (B) là *bán cầu Bắc*, nửa cầu có cực nam (N) là *bán cầu Nam*.

• Mỗi đường tròn lớn có đường kính NB gọi là một *vòng kinh tuyến*. Mỗi nửa vòng kinh tuyến nối hai mút N, B gọi là một kinh tuyến.

• Theo quy ước quốc tế, người ta chọn kinh tuyến đi qua đài thiên văn Grin-uych (Greenwich) (ngoại ô Luân Đôn – nước Anh) làm *kinh tuyến gốc*.



Hình 112

Xích đạo được lấy làm *vĩ tuyến gốc*.

Mặt phẳng qua kinh tuyến gốc chia Trái Đất thành hai nửa bằng nhau. Một nửa là bán cầu Đông, nửa kia là bán cầu Tây.

Kinh tuyến gốc cắt xích đạo ở G'.

Nếu P là một điểm của bề mặt Địa cầu thì vĩ tuyến qua P cắt kinh tuyến gốc ở G, kinh tuyến qua P cắt xích đạo ở điểm P'. Khi đó :

Số đo góc G'OP' gọi là *kinh độ* của P, số đo góc G'OG gọi là *vĩ độ* của P. Tuỳ theo vị trí của P ở phía đông hay phía tây đối với kinh tuyến gốc, ở phía bắc hay phía nam đối với xích đạo mà ta cần chỉ rõ thêm : kinh độ đông hay kinh độ tây, vĩ độ bắc hay vĩ độ nam.

Theo quy ước, ta viết toạ độ địa lí của một điểm, chẳng hạn Hà Nội, như sau :

Toạ độ địa lí của Hà Nội

$\begin{cases} 105^\circ\ 48'\ \text{Đông} \\ 20^\circ\ 01'\ \text{Bắc} \end{cases}$.

(kinh độ viết trên, vĩ độ viết dưới).


Hình 113

Ôn tập chương IV

Câu hỏi

1. Hãy phát biểu bằng lời :

a) Công thức tính diện tích xung quanh của hình trụ

b) Công thức tính thể tích của hình trụ.

c) Công thức tính diện tích xung quanh của hình nón.

d) Công thức tính thể tích của hình nón.

e) Công thức tính diện tích của mặt cầu.

g) Công thức tính thể tích của hình cầu.

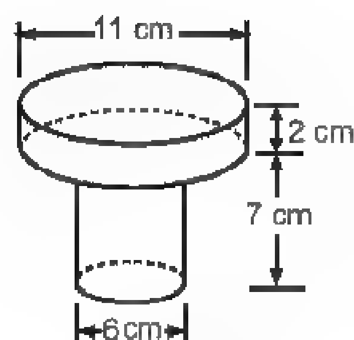
2. Hãy nêu cách tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón cụt.

Tóm tắt các kiến thức cần nhớ

Hình	Hình vẽ	Diện tích xung quanh	Thể tích
Hình trụ		$S_{xq} = 2\pi rh$	$V = \pi r^2 h$
Hình nón		$S_{xq} = \pi r l$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Hình cầu		$S = 4\pi R^2$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Bài tập

38. Hãy tính thể tích, diện tích bề mặt một chi tiết máy theo kích thước đã cho trên hình 114.

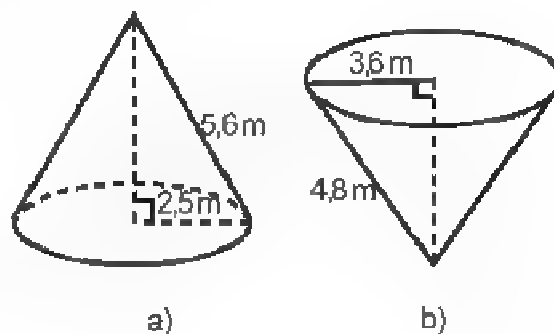


Hình 114

39. Một hình chữ nhật ABCD có AB > AD, diện tích và chu vi của nó theo thứ tự là $2a^2$ và 6a. Cho hình vẽ quay xung quanh cạnh AB, ta được một hình trụ.

Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình trụ này.

40. Hãy tính diện tích toàn phần của các hình tương ứng theo các kích thước đã cho trên hình 115.



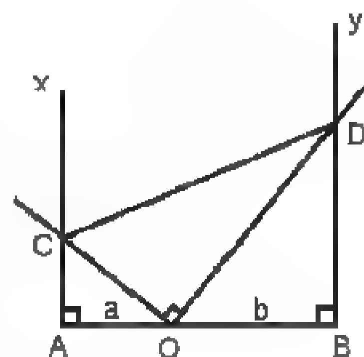
Hình 115

41. Cho ba điểm A, O, B thẳng hàng theo thứ tự đó, OA = a, OB = b (a, b cùng đơn vị : cm).

Qua A và B vẽ theo thứ tự các tia Ax và By cùng vuông góc với AB và cùng phía với AB. Qua O vẽ hai tia vuông góc với nhau và cắt Ax ở C, By ở D (xem hình 116).

a) Chứng minh AOC và BDO là hai tam giác đồng dạng ; từ đó suy ra tích AC.BD không đổi.

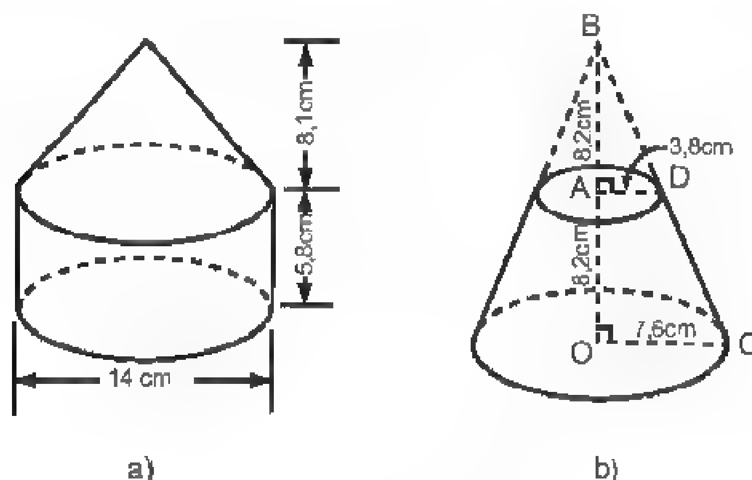
b) Tính diện tích hình thang ABDC khi $\widehat{COA} = 60^\circ$.



Hình 116

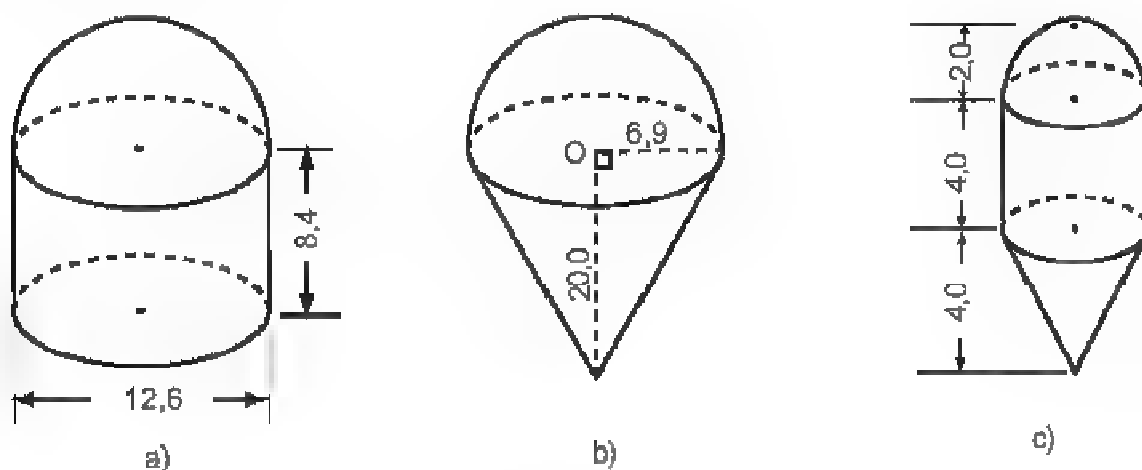
c) Với $\widehat{COA} = 60^\circ$ cho hình vẽ quay xung quanh AB. Hãy tính tỉ số thể tích các hình do các tam giác AOC và BOD tạo thành.

42. Hãy tính thể tích các hình dưới đây theo kích thước đã cho (h. 117).



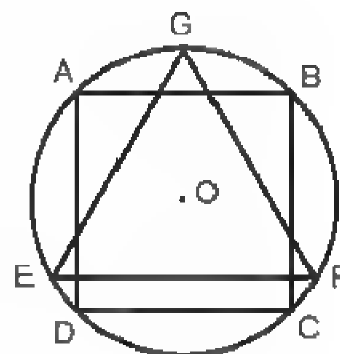
Hình 117

43. Hãy tính thể tích các hình dưới đây theo kích thước đã cho (h. 118) (đơn vị : cm).



Hình 118

44. Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R và GEF là tam giác đều nội tiếp đường tròn đó, EF là dây song song với AB (h. 119). Cho hình đó quay xung quanh trục GO. Chứng minh rằng :



Hình 119

a) Bình phương thể tích của hình trụ sinh ra bởi hình vuông bằng tích của thể tích hình cầu sinh ra bởi hình tròn và thể tích hình nón do tam giác đều sinh ra.

b) Bình phương diện tích toàn phần của hình trụ bằng tích của diện tích hình cầu và diện tích toàn phần của hình nón.

45. Hình 120 mô tả một hình cầu được đặt khít vào trong một hình trụ, các kích thước cho trên hình vẽ. Hãy tính :

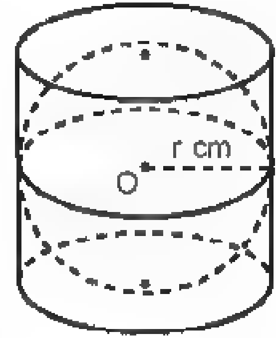
a) Thể tích hình cầu ;

b) Thể tích hình trụ ;

c) Hiệu giữa thể tích hình trụ và thể tích hình cầu ;

d) Thể tích của một hình nón có bán kính đường tròn đáy là r cm và chiều cao 2r cm ;

e) Từ các kết quả a), b), c), d), hãy tìm mối liên hệ giữa chúng.



Hình 120

Bài tập ôn cuối năm

A – Phần Đại số

1. Xét các mệnh đề sau :

I. $\sqrt{(-4)(-25)} = \sqrt{-4}.\sqrt{-25}$;

II. $\sqrt{(-4)(-25)} = \sqrt{100}$;

III. $\sqrt{100} = 10$;

IV. $\sqrt{100} = \pm 10$.

Những mệnh đề nào là sai ?

Hãy chọn câu trả lời đúng trong các câu A, B, C, D dưới đây :

(A) Chỉ có mệnh đề I sai;

(B) Chỉ có mệnh đề II sai ;

(C) Các mệnh đề I và IV sai ;

(D) Không có mệnh đề nào sai.

2. Rút gọn các biểu thức :

$M = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}$;

$N = \sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

3. Giá trị của biểu thức $\dfrac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{3\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ bằng :

(A) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; (B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; (C) 1 ; (D) $\dfrac{4}{3}$.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

4. Nếu $\sqrt{2+\sqrt{x}} = 3$ thì x bằng :

(A) 1 ; (B) $\sqrt{7}$; (C) 7 ; (D) 49.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

5. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào biến :

$$\left(\frac{2+\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}-2}{x-1}\right)\cdot\frac{x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}.$$

6. Cho hàm số $y = ax + b$. Tìm a và b, biết rằng đồ thị của hàm số đã cho thoả mãn một trong các điều kiện sau :

a) Đi qua hai điểm A (1 ; 3) và B (–1 ; –1) ;

b) Song song với đường thẳng $y = x + 5$ và đi qua điểm C (1 ; 2)

7. Cho hai đường thẳng :

$$y = (m+1)x + 5, \qquad (d_1)$$

$$y = 2x + n. \qquad (d_2)$$

Với giá trị nào của m và n thì :

a) d_1 trùng với d_2 ?

b) d_1 cắt d_2 ?

c) d_1 song song với d_2 ?

8. Chứng minh rằng khi k thay đổi, các đường thẳng $(k+1)x - 2y = 1$ luôn đi qua một điểm cố định. Tìm điểm cố định đó.

9. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 2x + 3|y| = 13 \\ 3x - y - 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = -2 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1 \end{cases}$.

10. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 2\sqrt{x-1} - \sqrt{y-1} - 1 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} - 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} (x \quad 1)^2 \quad 2y - 2 \\ 3(x-1)^2 + 3y - 1 \end{cases}$

11. Hai giá sách có 450 cuốn. Nếu chuyển 50 cuốn từ giá thứ nhất sang giá thứ hai thì số sách ở giá thứ hai sẽ bằng $\frac{4}{5}$ số sách ở giá thứ nhất. Tính số sách lúc đầu trong mỗi giá.

12. Quãng đường AB gồm một đoạn lên dốc dài 4 km và một đoạn xuống dốc dài 5 km. Một người đi xe đạp từ A đến B hết 40 phút và đi từ B về A hết 41 phút (vận tốc lên dốc, xuống dốc lúc đi và về như nhau). Tính vận tốc lúc lên dốc và lúc xuống dốc.

13. Xác định hệ số a của hàm số $y - ax^2$, biết rằng đồ thị của nó đi qua điểm A(−2 ; 1). Vẽ đồ thị của hàm số đó.

14. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $3x^2 \quad ax \quad b - 0$. Tổng $x_1 + x_2$ bằng :

(A) $-\frac{a}{3}$; (B) $\frac{a}{3}$; (C) $\frac{b}{3}$; (D) $\frac{b}{3}$.

Hãy chọn câu trả lời đúng

15. Hai phương trình $x^2 + ax + 1 = 0$ và $x^2 - x - a = 0$ có một nghiệm thực chung khi a bằng :

(A) 0 ; (B) 1 ; (C) 2 ; (D) 3.

Hãy chọn câu trả lời đúng

16. Giải các phương trình :

a) $2x^3 - x^2 + 3x + 6 = 0$; b) $x(x + 1)(x + 4)(x + 5) = 12$.

17. Một lớp học có 40 học sinh được sắp xếp ngồi đều nhau trên các ghế bang Nếu ta bớt đi 2 ghế bang thì mỗi ghế còn lại phải xếp thêm 1 học sinh. Tính số ghế băng lúc đầu.

18. Cạnh huyền của một tam giác vuông bằng 10 cm. Hai cạnh góc vuông có độ dài hơn kém nhau 2 cm Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác vuông đó

B – Phần Hình học

1. Chu vi hình chữ nhật ABCD là 20 cm. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đường chéo AC.

2. Tam giác ABC có $\widehat{B} = 45^o$, $\widehat{C} = 30^o$. Nếu AC = 8 thì AB bằng :

   (A) 4 ; (B) $4\sqrt{2}$; (C) $4\sqrt{3}$; (D) $4\sqrt{6}$.

   Hãy chọn câu trả lời đúng.

3. Cho tam giác ABC vuông ở C có đường trung tuyến BN vuông góc với đường trung tuyến CM, cạnh BC = a. Tính độ dài đường trung tuyến BN.

4. Nếu tam giác ABC vuông tại C và có $\sin A = \frac{2}{3}$ thì tgB bằng :

   (A) $\frac{3}{5}$; (B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; (C) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; (D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

   Hãy chọn câu trả lời đúng.

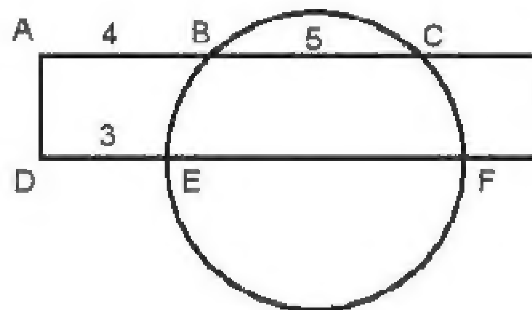
5. Tam giác ABC vuông tại C có AC = 15 cm. Đường cao CH chia AB thành hai đoạn AH và HB. Biết HB = 16 cm. Tính diện tích tam giác ABC.

6. Một hình chữ nhật cắt đường tròn như hình 121, biết AB = 4, BC = 5, DE = 3 (với cùng đơn vị đo).

   Độ dài EF bằng :

   (A) 6 ; (B) 7 ; (C) $\frac{20}{3}$; (D) 8.

   Hãy chọn câu trả lời đúng.



Hình 121

7. Cho tam giác đều ABC, O là trung điểm của BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm di động D và E sao cho $\widehat{DOE} = 60^o$.

   a) Chứng minh tích BD.CE không đổi.

   b) Chứng minh $\Delta BOD \backsim \Delta OED$. Từ đó suy ra tia DO là tia phân giác của $\widehat{BDE}$.

   c) Vẽ đường tròn tâm O tiếp xúc với AB. Chứng minh rằng đường tròn này luôn tiếp xúc với DE.

8. Cho hai đường tròn (O ; R) và (O' ; r) tiếp xúc ngoài (R > r). Hai tiếp tuyến chung AB và A'B' của hai đường tròn (O), (O') cắt nhau tại P (A và A' thuộc đường tròn (O'), B và B' thuộc đường tròn (O)). Biết PA = AB = 4 cm. Tính diện tích hình tròn (O').

9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O') và ngoại tiếp đường tròn (O). Tia AO cắt đường tròn (O') tại D. Ta có :

(A) CD = BD = O'D ; (B) AO = CO = OD ;

(C) CD = CO = BD ; (D) CD = OD = BD.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

10. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Các cung nhỏ AB, BC, CA có số đo lần lượt là $x + 75^o$, $2x + 25^o$, $3x - 22^o$. Một góc của tam giác ABC có số đo là :

(A) 57^o5 ; (B) 59^o ; (C) 61^o ; (D) 60^o.

Hãy chọn câu trả lời đúng.

11. Từ một điểm P ở ngoài đường tròn (O), kẻ hai cát tuyến PAB và PCD tới đường tròn. Gọi Q là một điểm nằm trên cung nhỏ BD (không chứa A và C) sao cho sđ$\overset{\frown}{BQ} = 42^o$ và sđ$\overset{\frown}{QD} = 38^o$. Tính tổng $\widehat{BPD} + \widehat{AQC}$.

12. Một hình vuông và một hình tròn có chu vi bằng nhau. Hỏi hình nào có diện tích lớn hơn ?

13. Cho đường tròn (O), cung BC có số đo bằng 120^o, điểm A di chuyển trên cung lớn BC. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho AD = AC. Hỏi điểm D di chuyển trên đường nào ?

14. Dựng tam giác ABC, biết BC = 4 cm, $\widehat{A} = 60^o$, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng 1 cm.

15. Tam giác ABC cân tại A có cạnh đáy nhỏ hơn cạnh bên, nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn lần lượt cắt tia AC và tia AB ở D và E. Chứng minh :

a) $BD^2 = AD.CD$;

b) Tứ giác BCDE là tứ giác nội tiếp ;

c) BC song song với DE.

16. Một mặt phẳng chứa trục OO' của một hình trụ ; phần mặt phẳng nằm trong hình trụ là một hình chữ nhật có chiều dài 3 cm, chiều rộng 2 cm. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình trụ đó.

17. Khi quay tam giác ABC vuông ở A một vòng quanh cạnh góc vuông AC cố định, ta được một hình nón. Biết rằng BC = 4 dm, $\widehat{ACB} = 30^o$. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình nón.

18. Một hình cầu có số đo diện tích (đơn vị : m^2) bằng số đo thể tích (đơn vị : m^3). Tính bán kính hình cầu, diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu.

MỤC LỤC